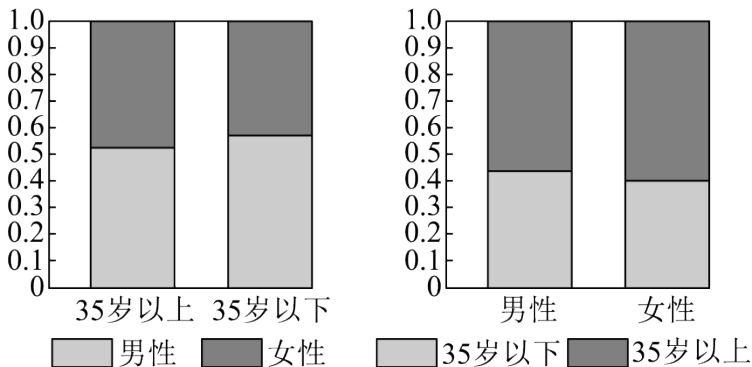


$$\text{所以 } A \cap B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right\},$$

所以集合 $A \cap B$ 的真子集个数为 $2^2 - 1 = 3$ ，故选：C.

3. 某调查机构抽取了部分关注济南地铁建设的市民作为样本，分析其年龄和性别结构，并制作出如下等高条形图. 根据图中（35岁以上含35岁）的信息，关于该样本的结论不一定正确的是（ ）



- A. 男性比女性更关注地铁建设
- B. 关注地铁建设的女性多数是35岁以上
- C. 35岁以下的男性人数比35岁以上的女性人数多
- D. 35岁以上的人对地铁建设关注度更高

【答案】C

【解析】由等高条形图可得：对于 A：由左图知，样本中男性数量多于女性数量，从而男性比女性更关注地铁建设，故 A 正确；

对于 B：由右图知女性中 35 岁以上的占多数，从而样本中多数女性是 35 岁以上，从而得到关注地铁建设的女性多数是 35 岁以上，故 B 正确；

对于 C：由左图知男性人数大于女性人数，由右图知 35 岁以下的男性占男性人数比 35 岁以上的女性占女性人数的比例少，无法判断 35 岁以下的男性人数与 35 岁以上的女性人数的多少，故 C 不一定正确；

对于 D：由右图知样本中 35 岁以上的人对地铁建设关注度更高，故 D 正确。

故选：C.

4. 将函数 $f(x) = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度后的函数图象关于原点对称，则实数 φ 的最小值为（ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$
- B. $\frac{\pi}{4}$
- C. $\frac{\pi}{3}$
- D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】因为 $f(x) = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度可得到函数 $y = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6} - \varphi\right)$ 的图象,

由题意可知, 函数 $y = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6} - \varphi\right)$ 的图象关于原点对称,

所以 $\frac{\pi}{6} - \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以, $\varphi = \frac{\pi}{6} - k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

因为 $\varphi > 0$, 故当 $k = 0$ 时, φ 取最小值 $\frac{\pi}{6}$, 故选: A.

5. 已知随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \leq 1) = P(\xi \geq a + 2)$, 则 $\frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+3x} (x > 0)$ 的最大值为 ()

A. $3 + 2\sqrt{3}$

B. $3 - 2\sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{3}$

D. $2 - \sqrt{3}$

【答案】D

【解析】因为随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \leq 1) = P(\xi \geq a + 2)$,

所以 $P(\xi \leq 1) = P(\xi \geq 3)$, 即 $a + 2 = 3$, 所以 $a = 1$, 所以 $\frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+3x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+3x}$

令 $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+3x}$, $x \in (0, +\infty)$,

所以 $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+3x} = \frac{1+3x-1-x}{(1+x)(1+3x)} = \frac{2x}{1+4x+3x^2} = \frac{2}{3x + \frac{1}{x} + 4}$,

又 $3x + \frac{1}{x} + 4 \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{x}} + 4 = 2\sqrt{3} + 4$, 当且仅当 $3x = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号,

所以 $f(x) = \frac{2}{3x + \frac{1}{x} + 4} \leq \frac{2}{2\sqrt{3} + 4} = 2 - \sqrt{3}$, 即 $\frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+3x} (x > 0)$ 的最大值为 $2 - \sqrt{3}$.

故选: D.

6. 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, M 是棱 AB 的中点, 正四棱柱的高 $h \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, 点 M 到平面 PCD 的距离的最大值为 ()

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{32}{9}$

【答案】C

【解析】设底面四边形 $ABCD$ 的中心为 O , 连接 PO , 则 $PO = h$, 设点 M 到平面 PCD 的距离为 d ,

$OC = OD = \sqrt{2}$, $PC = PD = \sqrt{2+h^2}$, 则 V_{PCD} 中, CD 边上的高为 $\sqrt{2+h^2-1} = \sqrt{1+h^2}$,

$$\text{则 } S_{VPCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{1+h^2} = \sqrt{1+h^2}, S_{VMCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2,$$

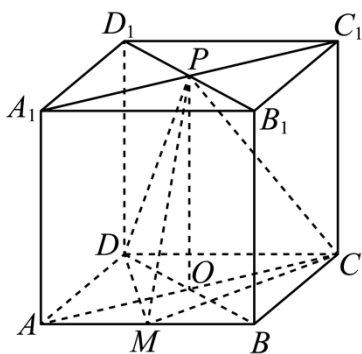
$$\text{由 } V_{M-PCD} = V_{P-MCD}, \text{ 得 } \frac{1}{3} \times S_{VPCD} \times d = \frac{1}{3} \times S_{VMCD} \times h,$$

$$\text{所以 } d = \frac{2h}{\sqrt{h^2+1}} = 2\sqrt{\frac{h^2}{h^2+1}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{h^2}}},$$

$$\text{由 } h \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], \text{ 得 } h^2 \in [2, 8], \text{ 则 } 1 + \frac{1}{h^2} \in \left[\frac{9}{8}, \frac{3}{2}\right], \text{ 则 } \frac{1}{1+\frac{1}{h^2}} \in \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right],$$

$$\text{所以 } d \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right], \text{ 即点 } M \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离的取值范围是 } \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right],$$

$$\text{所以点 } M \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离的最大值为 } \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$



故选：C.

7. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ， O 为坐标原点， Q 是双曲线 E 右支上一点，且

$$2 < \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|} \leq 4, \text{ 则双曲线的离心率为 ()}$$

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$ ，渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

因为 Q 是双曲线 E 右支上一点，且 $2 < \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|} \leq 4$ ，所以 \overrightarrow{OF} 在 \overrightarrow{OQ} 方向的投影的取值范围为 $(2, 4]$ ，

当 Q 在右顶点时 \overrightarrow{OF} 在 \overrightarrow{OQ} 方向的投影最大，最大值为 $|\overrightarrow{OF}| = c$ ，即 $c = 4$ ，

当 Q 在无限远处, 此时 \vec{OF} 在 \vec{OQ} 方向的投影近似 \vec{OF} 在渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 方向上的投影, 但是不能取等号,

所以 \vec{OF} 在渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 方向上的投影为 2, 则 $F(4,0)$ 到渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的距离

$$d = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{即 } d = \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4b}{c} = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } b = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } a = \sqrt{c^2 - b^2} = 2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

故选: A

8. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且满足 $f(x) - g(2-x) = 4$, $g(x) + f(x-4) = 6$,

$$g(3-x) + g(x+1) = 0, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{30} f(n) = (\quad)$$

A. -456

B. -345

C. 345

D. 456

【答案】B

【解析】由 $f(x) - g(2-x) = 4$, 则 $f(-x) - g(x+2) = 4$, 即 $g(x+2) = f(-x) - 4$,

由 $g(x) + f(x-4) = 6$, 则 $g(x+2) + f(x-2) = 6$, 即 $g(x+2) = 6 - f(x-2)$,

又 $g(x) + f(x-4) = 6$, 则 $g(x+1) + f(x-3) = 6$,

$f(x) - g(2-x) = 4$, 则 $f(x-1) - g(3-x) = 4$,

又 $g(3-x) + g(x+1) = 0$,

所以 $g(x+1) + f(x-3) - [f(x-1) - g(3-x)] = g(x+1) + f(x-3) - f(x-1) + g(3-x) = 2$,

即 $f(x-3) - f(x-1) = 2$, 即 $f(x) = f(x+2) + 2$,

所以 $f(x-2) = f(x) + 2$, 故 $g(x+2) = 6 - f(x-2) = 4 - f(x)$,

综上 $f(-x) - 4 = 4 - f(x)$, 则 $f(-x) + f(x) = 8$, 故 $f(x)$ 关于 $(0, 4)$ 对称,

且有 $f(x) + x = f(x+2) + x + 2$,

令 $h(x) = f(x) + x$, 则 $h(x) = h(x+2)$, 即 $h(x)$ 的周期为 2,

由 $g(3-x) + g(x+1) = 0$ 知 $g(x)$ 关于 $(2, 0)$ 对称且 $g(2) = 0$,

所以 $f(0) - g(2) = 4$, 即 $f(0) = 4$, 则 $h(0) = f(0) + 0 = 4$,

$$\text{由} \begin{cases} f(-1) + f(1) = 8 \\ f(-1) = f(1) + 2 \end{cases}, \text{ 可得 } f(1) = 3, \text{ 则 } h(1) = f(1) + 1 = 4,$$

所以 $h(0) = h(2) = f(2) + 2 = 4$ 则 $f(2) = 2$;

$$h(1) = h(3) = f(3) + 3 = 4 \text{ 则 } f(3) = 1,$$

依次类推可得 $f(4) = 0, f(5) = -1, \dots, f(n) = 4 - n$, 则 $f(30) = 4 - 30 = -26$,

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{30} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(30) = \frac{30 \times (3 - 26)}{2} = -345.$$

故选: B

【点睛】 关键点点睛: 根据递推式得 $f(-x) + f(x) = 8$ 且 $f(x) = f(x+2) + 2$, 构造 $h(x) = f(x) + x$ 并确定其周期, 依据周期性求 $f(n)$.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

A. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

B. 非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} , 满足 $|\vec{a}| < |\vec{b}|$ 且 \vec{a} 和 \vec{b} 同向, 则 $\vec{a} < \vec{b}$

C. 非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$

D. 已知 $\vec{a} = (2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 的投影向量的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$

【答案】 AC

【解析】 对于 A: 根据数量积的运算律可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, 故 A 正确;

对于 B: 向量不可以比较大小, 故 B 错误;

对于 C: 非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$,

即 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 故 C 正确;

对于 D: 因为 $\vec{a} = (2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

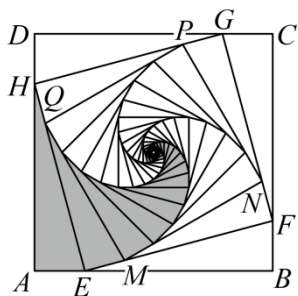
所以 \vec{a} 在 \vec{b} 的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} (1, \sqrt{3}) = (\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4})$, 故 D 错误;

故选: AC

10. 平面螺旋是以一个固定点开始，向外圈逐渐旋绕而形成的图案，如图（1）。它的画法是这样的：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，取正方形 $ABCD$ 各边的四等分点 E, F, G, H 作第二个正方形，然后再取正方形 $EFGH$ 各边的四等分点 M, N, P, Q 作第三个正方形，以此方法一直循环下去，就可得到阴影部分图案，设正方形 $ABCD$ 边长为 a_1 ，后续各正方形边长依次为 $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ；如图（2）阴影部分，设直角三角形 AEH 面积为 b_1 ，后续各直角三角形面积依次为 $b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ 。则（ ）



图(1)



图(2)

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项， $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 为公比的等比数列
- B. 从正方形 $ABCD$ 开始，连续 3 个正方形的面积之和为 32
- C. 使得不等式 $b_n > \frac{1}{2}$ 成立的 n 的最大值为 3
- D. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < 4$

【答案】ACD

【解析】对于 A 选项，由题意知， $a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_n}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}a_n^2$ 且 $a_n > 0$ ，所以 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{10}}{4}a_n$ ，又因为 $a_1 = 4$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项， $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 为公比的等比数列，故 A 正确；

对于 B 选项，由上知， $a_n = 4 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}$ ， $a_1 = 4$ ， $a_2 = \sqrt{10}$ ， $a_3 = \frac{5}{2}$ ，

所以 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 4^2 + (\sqrt{10})^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{129}{4}$ ，故 B 错误；

对于 C 选项， $b_n = \frac{1}{2} \times \frac{a_n}{4} \times \frac{3a_n}{4} = \frac{3a_n^2}{32} = \frac{3}{32} \times \left[4 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}\right]^2 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$ ，

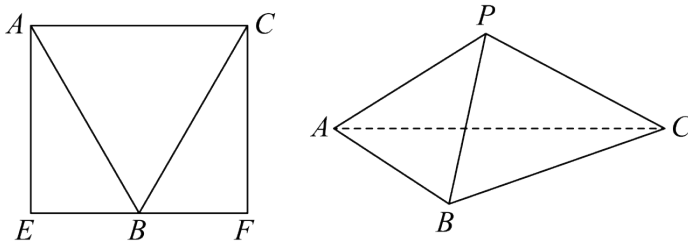
易知 $\{b_n\}$ 是单调递减数列，且 $b_3 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{75}{128} > \frac{1}{2}$ ， $b_4 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{375}{1024} < \frac{1}{2}$ ，

故使得不等式 $b_n > \frac{1}{2}$ 成立的最大的最大值为 3，故 C 正确；

对于 D 选项，因为 $S_n = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{5}{8} \right)^n \right]}{1 - \frac{5}{8}} = 4 \left[1 - \left(\frac{5}{8} \right)^n \right]$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$ ，

所以 $0 < 1 - \left(\frac{5}{8} \right)^n < 1$ ，所以 $S_n < 4$ ，故 D 正确；故选：ACD.

11. 如图，在矩形 $AEFC$ 中， $AE = 2\sqrt{3}$ ， $EF = 4$ ， B 为 EF 的中点，现分别沿 AB 、 BC 将 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ 翻折，使点 E 、 F 重合，记为点 P ，翻折后得到三棱锥 $P-ABC$ ，则（ ）



A. $PB \perp AC$

B. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

C. 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{22}}{2}$

D. 直线 PA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【答案】ACD

【解析】对于 A 选项，翻折前 $AE \perp BE$ ， $CF \perp BF$ ，翻折后，则有 $PB \perp PA$ ， $PB \perp PC$ ，因为 $PA \cap PC = P$ ， PA 、 $PC \subset$ 平面 PAC ，所以 $BP \perp$ 平面 PAC ，故 A 正确；

对于 B 选项，在 $\triangle PAC$ 中， $PA = PC = 2\sqrt{3}$ ， AC 边上的高为 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $V_{P-ABC} = V_{B-PAC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ ，故 B 错误；

对于 C 选项，因为 $PA = PC = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 4$ ，

由余弦定理，可得 $\cos \angle APC = \frac{PA^2 + PC^2 - AC^2}{2PA \cdot PC} = \frac{12 + 12 - 16}{2 \times 12} = \frac{1}{3}$ ，

$$\text{则 } \sin \angle APC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle APC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \triangle PAC \text{ 的外接圆的半径 } r = \frac{AC}{2 \sin \angle APC} = \frac{4}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R ,

$$\text{因为 } BP \perp \text{平面 } PAC, \text{ 所以 } R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}PB\right)^2 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}, \text{ 所以 } R = \frac{\sqrt{22}}{2},$$

即三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{22}}{2}$, 故 C 正确;

$$\text{对于 D 选项, 在 } \triangle PAC \text{ 中, } \cos \angle APC = \frac{12+12-16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}, BC = \sqrt{PC^2 + PB^2} = \sqrt{12+4} = 4,$$

$$\text{则 } \cos \langle PA, BC \rangle = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{PA}| |\vec{BC}|} = \frac{\vec{PA} \cdot (\vec{PC} - \vec{PB})}{2\sqrt{3} \times 4} = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PC} - \vec{PA} \cdot \vec{PB}}{8\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 PA 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$, 故 D 正确, 故选: ACD.

12. 在平面直角坐标系 xOy 的第一象限内随机取一个整数点 $(x, y) (x, y = 1, 2, 3, \dots, n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 若用随机变量 η 表示从这 n^2 个点中随机取出的一个点的横、纵坐标之和, $P(\xi = x, \eta = b)$ 表示 $\xi = x, \eta = b$ 同时发生的概率, 则 ()

A. 当 $n = 3$ 时, $P(\eta = 3 | \xi = 2) = \frac{1}{3}$

B. 当 $n = 4$ 时, $P(\xi + \eta = 8) = \frac{1}{16}$

C. 当 $n = 5$ 时, η 的均值为 6

D. 当 $n = k (k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $P(\xi = k, \eta = 2k) = \frac{1}{k^2}$

【答案】 ACD

【思路分析】 利用条件概率公式可判断 A 选项; 列举出满足 $\xi + \eta = 8$ 的点的坐标, 利用古典概率公式可判断 B 选项; 利用离散型随机变量的期望公式可判断 C 选项; 列举出满足 $\xi = k, \eta = 2k$ 的点的坐标, 利用古典概型的概率公式可判断 D 选项.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/648110131041006134>