

炎德.英才大联考 湖南师范大学附属中学 2024 届高三上数学期末综合测试试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

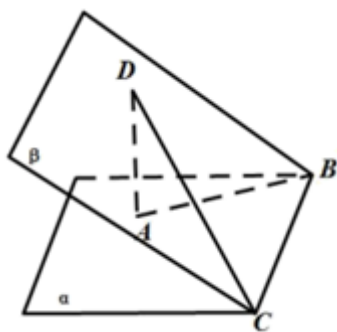
1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ，则 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 =$ ()

- A. 12 B. 11 C. 6 D. 3

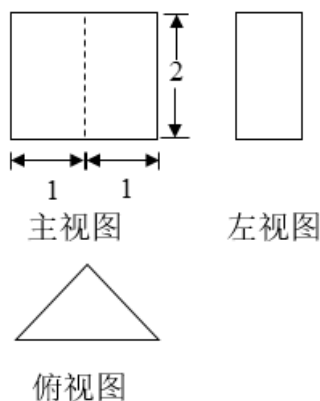
2. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \leq 2, \\ x + 1 \geq 0, \end{cases}$ ，则 $z = 4x + y$ 的取值范围为 ()

- A. $[-5, -1]$ B. $[-5, 5]$ C. $[-1, 5]$ D. $[-7, 3]$

3. 如图，平面 α 与平面 β 相交于 BC ， $AB \subset \alpha$ ， $CD \subset \beta$ ，点 $A \notin BC$ ，点 $D \notin BC$ ，则下列叙述错误的是 ()



- A. 直线 AD 与 BC 异面
- B. 过 AD 只有唯一平面与 BC 平行
- C. 过点 D 只能作唯一平面与 BC 垂直
- D. 过 AD 一定能作一平面与 BC 垂直
4. 《九章算术》中将底面是直角三角形的直三棱柱称为“堑堵”.某“堑堵”的三视图如图，则它的外接球的表面积为 ()



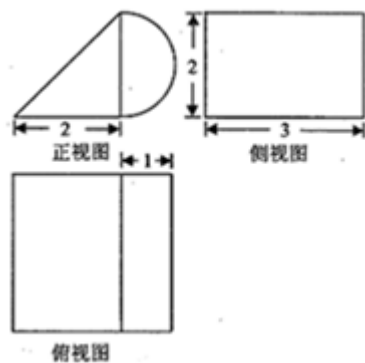
- A. 4π B. 8π C. $6+4\sqrt{2}$ D. $\frac{8}{3}\pi$

5. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令

$$a = \ln 2, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2, \text{ 则 } f(a), f(b), f(c) \text{ 的大小关系为 ()}$$

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$

6. 某几何体的三视图如图所示(单位: cm), 则该几何体的体积等于 () cm^3



- A. $4 + \frac{2\pi}{3}$ B. $4 + \frac{3\pi}{2}$ C. $6 + \frac{2\pi}{3}$ D. $6 + \frac{3\pi}{2}$

7. 已知斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 且与抛物线交于 A, B 两点, 若线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 1, 则 $p =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

8. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左焦点 F 的直线 l 交 C 的左支于 A, B 两点, 直线 AO (O 是坐标原点) 交 C

的右支于点 D , 若 $DF \perp AB$, 且 $|BF| = |DF|$, 则 C 的离心率是 ()

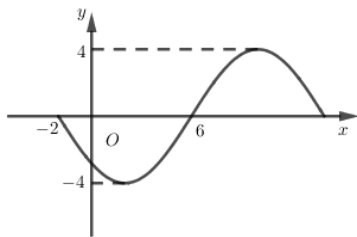
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

9. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) 的部分图象如图所示, 则函数表达式为 ()



A. $y = -4 \sin(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4})$

B. $y = 4 \sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4})$

C. $y = -4 \sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4})$

D. $y = 4 \sin(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4})$

10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E , F 分别为 CC_1 , DD_1 的中点, 则异面直线 AF , DE 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

C. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

11. 设 m , n 是两条不同的直线, α , β 是两个不同的平面, 给出下列四个命题: ①若 $m \parallel n$, $m \perp \beta$, 则 $n \perp \beta$;

②若 $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$; ③若 $m \perp \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \perp n$; ④若 $m \parallel \alpha$, $m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$; 其中真命题的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - k(x + \frac{1}{2})$ 在 $\mathbb{R}$ 上零点最多, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{2}{3e})$

B. $(-\frac{2}{3e}, 0)$

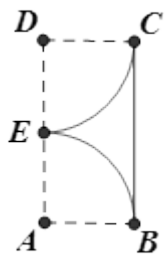
C. $(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, 0)$

D. $(0, \frac{1}{2\sqrt{e}})$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

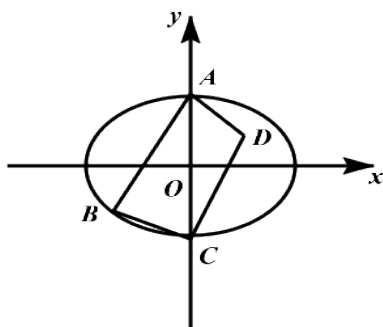
13. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为边 AD 的中点, $AB = 1$, $BC = 2$, 分别以 A 、 D 为圆心, 1 为半径作圆弧 EB 、 EC (E 在线段 AD 上). 由两圆弧 EB 、 EC 及边 BC 所围成的平面图形绕直线 AD 旋转一周, 则所形成的几何体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 点 A, C 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 短轴的两个端点, 点 B 在椭圆上,

$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, 记 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.



16. 《九章算术》中记载了“今有共买豕，人出一百，盈一百；人出九十，适足。问人数、豕价各几何？”.其意思是“若干个人合买一头猪，若每人出 100，则会剩下 100；若每人出 90，则不多也不少。问人数、猪价各多少？”.设 x, y 分别为人数、猪价，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

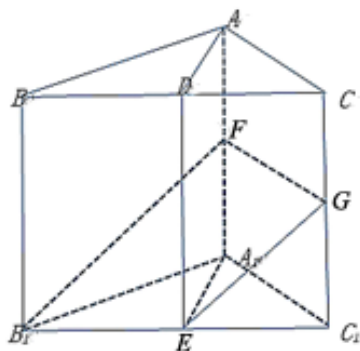
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+a| + |x-a^2-a| (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 若存在 $a \in [-1, 0]$, 使得不等式 $f(x) \geq b$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

18. (12 分) 如图, 在直三棱柱中 $ABC-A_1B_1C_1$, D, E, F, G 分别是 BC, B_1C_1, AA_1, CC_1 中点, 且 $AB = AC = 2\sqrt{2}$, $BC = AA_1 = 4$.

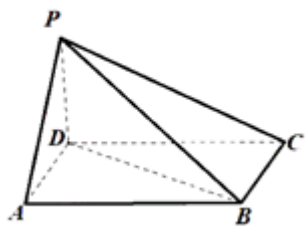


(1) 求证: $BC \perp$ 平面 ADE ;

(2) 求点 D 到平面 EFG 的距离.

19. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $PD \perp$ 底面

$$ABCD, \quad PD = AD = 1, AB = \sqrt{5}, \quad \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



(1) 证明: $PA \perp BD$;

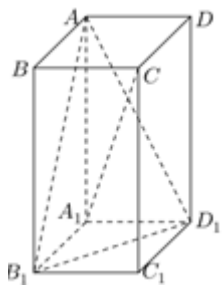
(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x - 2x$

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - 2\ln x$, 对于任意 $x \in (0, +\infty)$, $g(x) > a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = 1$, $BB_1 = 2$.



(1) 求异面直线 A_1C 与直线 AD_1 所成的角的大小;

(2) 求点 C 到平面 AB_1D_1 的距离.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(0, \sqrt{3})$, 曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 以原点为极点, x

轴正半轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 判断点 P 与直线 l 的位置关系并说明理由;

(Ⅱ) 设直线与曲线 C 的两个交点分别为 A, B , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

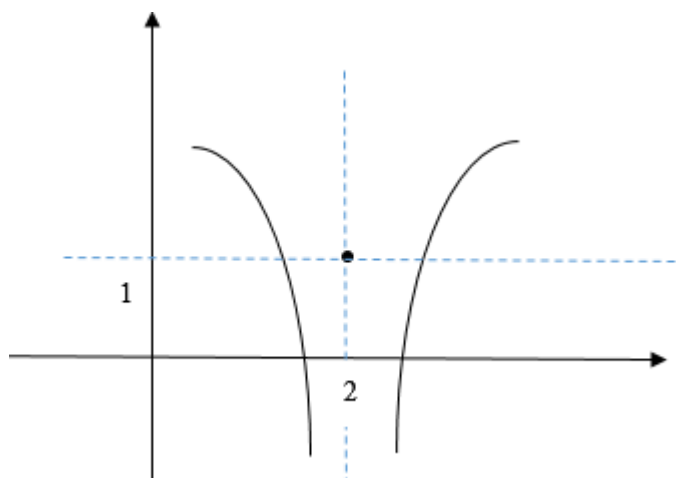
1、B

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用函数的图象判断函数的零点个数，然后转化求解，即可得出结果.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示，



令 $f(x) = t$,

由图可得关于 x 的方程 $f(x) = t$ 的解有两个或三个 ($t = 1$ 时有三个, $t \neq 1$ 时有两个),

所以关于 t 的方程 $t^2 + bt + c = 0$ 只能有一个根 $t = 1$ (若有两个根, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有四个或五个根),

由 $f(x) = 1$, 可得 x_1, x_2, x_3 的值分别为 1, 2, 3,

则 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 11$

故选 B.

【点睛】

本题考查数形结合以及函数与方程的应用，考查转化思想以及计算能力，属于常考题型.

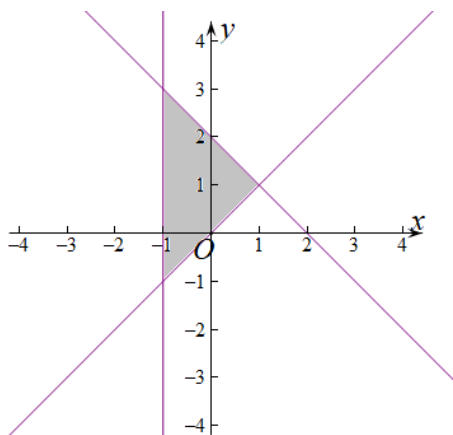
2、B

【解析】

根据约束条件作出可行域，找到使直线 $y = -4x + z$ 的截距取最值得点，相应坐标代入 $z = 4x + y$ 即可求得取值范围.

【详解】

画出可行域，如图所示：



由图可知，当直线 $z = 4x + y$ 经过点 $A(-1, -1)$ 时， z 取得最小值 -5 ；经过点 $B(1, 1)$ 时， z 取得最大值 5 ，故 $-5 \leq z \leq 5$.

故选：B

【点睛】

本题考查根据线性规划求范围，属于基础题.

3、D

【解析】

根据异面直线的判定定理、定义和性质，结合线面垂直的关系，对选项中的命题判断.

【详解】

A. 假设直线 AD 与 BC 共面，则 A, D, B, C 共面，则 AB, CD 共面，与 $AB \subset \alpha, CD \subset \beta$ 矛盾，故正确.

B. 根据异面直线的性质知，过 AD 只有唯一平面与 BC 平行，故正确.

C. 根据过一点有且只有一个平面与已知直线垂直知，故正确.

D. 根据异面直线的性质知，过 AD 不一定能作一平面与 BC 垂直，故错误.

故选：D

【点睛】

本题主要考查异面直线的定义，性质以及线面关系，还考查了理解辨析的能力，属于中档题.

4、B

【解析】

由三视图判断出原图，将几何体补形为长方体，由此计算出几何体外接球的直径，进而求得球的表面积.

【详解】

根据题意和三视图知几何体是一个底面为直角三角形的直三棱柱，底面直角三角形的斜边为 2，侧棱长为 2 且与底面垂直，因为直三棱柱可以复原成一个长方体，该长方体外接球就是该三棱柱的外接球，长方体对角线就是外接球直径，则 $(2R)^2 = 4R^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ ，那么 $S_{\text{外接球}} = 4\pi R^2 = 8\pi$.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查三视图还原原图，考查几何体外接球的有关计算，属于基础题.

5、C

【解析】

可设 $x \in [0, 1]$ ，根据 $f(x)$ 在 R 上为偶函数及 $f(x+2) = f(-x)$ 便可得到： $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$ ，可设 x_1 ，

$x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，根据 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数便可得出 $f(x_1) < f(x_2)$ ，从而得出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，再

根据对数的运算得到 a 、 b 、 c 的大小关系，从而得到 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 的大小关系.

【详解】

解：因为 $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$ ，即 $0 < a < 1$ ，又 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

设 $x \in [0, 1]$ ，根据条件， $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$ ， $-x+2 \in [1, 2]$ ；

若 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则： $-x_1+2 > -x_2+2$ ；

Q $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数；

$\therefore f(-x_1+2) < f(-x_2+2)$ ；

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$ ；

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数；

所以 $f(b) = f(2) = f(0)$ ， $f(c) = f(-1) = f(1)$

$\therefore f(b) < f(a) < f(c)$

故选：C

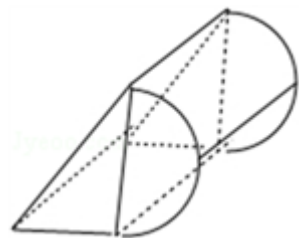
【点睛】

考查偶函数的定义，减函数及增函数的定义，根据单调性定义判断一个函数单调性的方法和过程：设 $x_1 < x_2$ ，通过条件比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ ，函数的单调性的应用，属于中档题.

6、D

【解析】

解：根据几何体的三视图知，该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，



结合图中数据，计算它的体积为：

$$V = V_{\text{三棱柱}} + V_{\text{半圆柱}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \times 1 = (6 + 1.5\pi) \text{ cm}^3.$$

故答案为 $6 + 1.5\pi$.

点睛：根据几何体的三视图知该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，结合图中数据计算它的体积即可.

7、C

【解析】

设直线 l 的方程为 $x = \frac{1}{2}y + \frac{p}{2}$ ，与抛物线联立利用韦达定理可得 p .

【详解】

由已知得 $F(\frac{p}{2}, 0)$ ，设直线 l 的方程为 $x = \frac{1}{2}y + \frac{p}{2}$ ，并与 $y^2 = 2px$ 联立得 $y^2 - py - p^2 = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， AB 的中点 $C(x_0, y_0)$ ，

$$\therefore y_1 + y_2 = p,$$

又线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 1，则 $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{p}{2} = 1$ ，所以 $p = 2$ ，

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的相交弦问题，利用韦达定理是解题的关键，属中档题.

8、D

【解析】

如图，设双曲线的右焦点为 F_2 ，连接 DF_2 并延长交右支于 C ，连接 FC ，设 $DF_2 = x$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/655214330012011131>