2024-2025学年北京市海淀区高二上学期11月期中数学检测试题

一、单选题（本大题共10小题）

1．空间直角坐标系中，$A(1,-2,3),B(3,0,-1)$，则$\overrightarrow{AB}=$（　　）

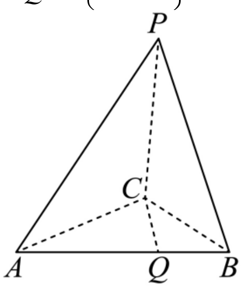
A．$(-2,-2,4)$　　B．$(4,-2,2)$　　C．$(2,2,-4)$　　D．$(-4,2,-2)$

2．已知直线m，n，l，平面α,β，下列正确的是（　　）

A．若$l\cap\alpha=P,n\subset\alpha$，则$l$与$n$异面　　B．若$m//n,n\subset\alpha$，则$m//\alpha$

C．若$l\perp m,l\perp n,m\subset\alpha,n\subset\alpha$，则$l\perp\alpha$　　D．若$\alpha\perp\beta,m\perp\alpha,n\perp\beta$，则$m\perp n$

3．在四面体$P-ABC$中，点Q是AB靠近B的三等分点，记$\overrightarrow{PA}=\vec{a},\overrightarrow{PB}=\vec{b},\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CQ}=$（　　）



A．$\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　B．$\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

C．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$　　D．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$

4．若圆锥的侧面积等于和它等高等底的圆柱的侧面积时，圆锥轴截面顶角的度数为（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．π　　D．$\frac{2\pi}{3}$

5．已知直线m，n，平面$\alpha,m//n,m\not\subset\alpha$，那么“$n//\alpha$”是“$m//\alpha$”的（　　）

A．充分必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分不必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．在空间直角坐标系中，直线l的方向向量$\overrightarrow{m}=(1,0,2)$，点$A(0,1,0)$在直线$l$上，点$B(-1,2,3)$到直线$l$的距离是（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．$2\sqrt{2}$

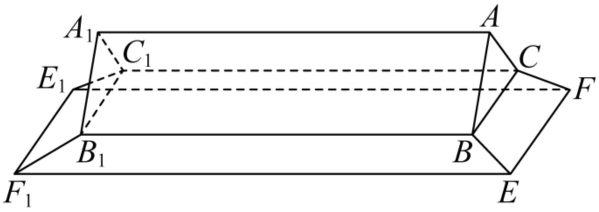
7．一个正棱锥，其侧棱长是底面边长的$\frac{7}{10}$，这个正棱锥可能是（　　）

A．正三棱锥　　B．正四棱锥　　C．正五棱锥　　D．正六棱锥

8．正三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle APB=\frac{\pi}{6},PA=2,Q$ 为棱 PA 的中点，点 M，N 分别在棱 PB，PC 上，三角形 QMN 周长的最小值为（　　）

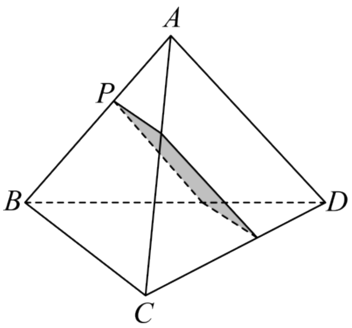
A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{2}$

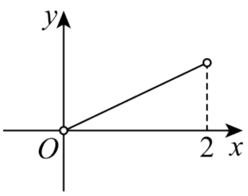
9．歇山顶是中国古代建筑传统屋顶之一，它有一条正脊、四条垂脊和四条戗脊，将歇山顶近似看成如图中的多面体，其上部为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1,AB=AC=2\sqrt{2},BC=4$，$AA_1=18$，四边形 EFF_1E_1 为矩形，平面 $EFF_1E_1//$ 平面 BCC_1B_1，且 $E_1E\subset$ 平面 ABB_1A_1，$F_1F\subset$ 平面 $ACC_1A_1,BE=CF=C_1F_1=B_1E_1,EE_1=20,EF=6$，则正脊末端 A 与戗脊末端 E 两点间距离为（　　）



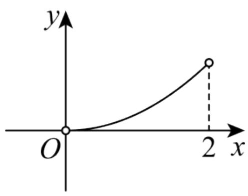
A．4　　B．$\sqrt{17}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{19}$

10．如图，正四面体 $A-BCD$ 的棱长 2，过棱 AB 上任意一点 P 做与 AD，BC 都平行的截面，将正四面体分成上下两部分，记 $AP=x(0<x<2)$，截面上方部分的体积为 $V(x)$，则函数 $y=V(x)$ 的图象大致为（　　）

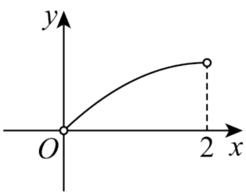




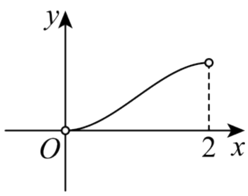
A．



B．



C．



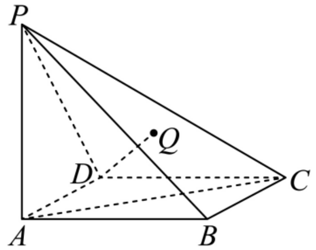
D．

二、填空题（本大题共 5 小题）

11．已知 $A(0,2,3),B(1,4,6),C(2,2,5),D(0,m,n),\overline{AB}//\overline{CD}$，则 $m+n=$________________.

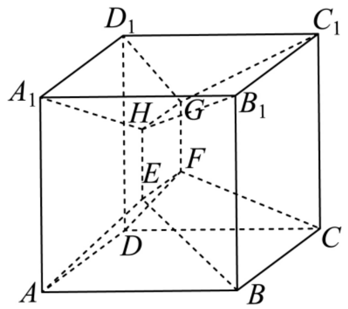
12．已知平面 α,β，直线 n，给出三个语句：① $\alpha\perp\beta$，② $n\perp\alpha$，③ $n//\beta$.从这三个语句中选取两个做条件，剩下一个做结论，构成一个真命题，该命题是：若__________，则_______________.（只需填写序号）

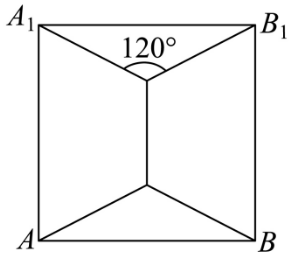
13．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA=AB=2$，$\angle DAB=60^{\circ},PA\perp$ 平面 $ABCD$，Q 点在四棱锥 $P-ABCD$ 表面上，且 $DQ\perp AC$，则 PC 与底面 $ABCD$ 的夹角为_______________；Q 点所形成的轨迹长度是_______________.



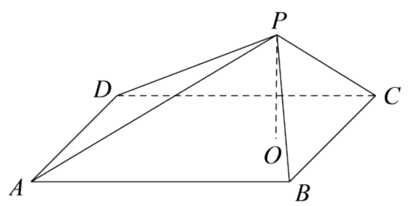
14．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内，正方形 $EFGH$ 中心与正方体中心重合，从前面观察如图所示，若棱长 $AB=2\sqrt{3}$，则正棱台 $EFGH-BCC_1B_1$ 的侧棱长为____________

.





15．如图，O 是正方形 $ABCD$ 内一动点（不包括边界），$PO\perp$ 平面 $ABCD$ 于 O，$AB=2$，$PO=1$，$PA=PD$，给出下列四个结论：



①四棱锥 $P-ABCD$ 的体积是定值；

②设平面 PAD 与平面 PBC 交于 l，则 $l//BC$；

③四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积既有最小值又有最大值；

④存在点 O，使得四棱锥 $P-ABCD$ 的四个侧面两两垂直．

其中所有正确结论的序号是_______________.

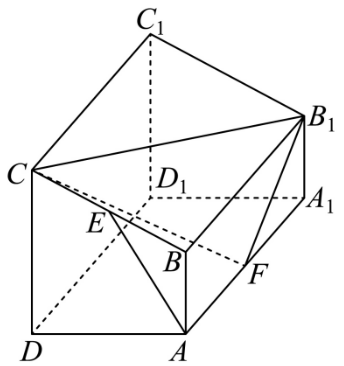
三、解答题（本大题共3小题）

16．已知空间四点 $A(0,2,3),B(1,4,6),C(1,2,5),D(0,m,n),\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

(1)求$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$和 n 的值；

(2)若点 D 在平面 ABC 内，请直接写出 m 的值.

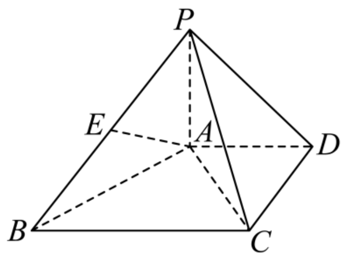
17．如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形， $AB//CD,CD\perp AD$，其中 $AD=CD=2,DD_1=4,AB=1.E$ 是 BC 的中点， F 是 AA_1 的中点.



(1)求证: $AE//$平面 CB_1F；

(2)求平面 CB_1F 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值 .

18．如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中， $PA\perp$平面 $ABCD,AB\perp AC,PD=AB=AC=\sqrt{2}PA$.



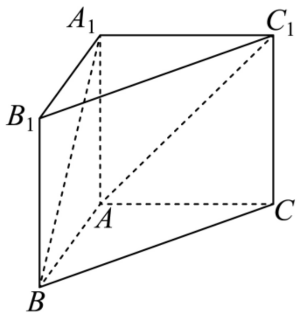
(1)若 $AD=DC$，求证：平面 $PAD\perp$平面 PCD；

(2)若 $AD=DC$，PB 中点为 E，试问在棱 CD 上是否存在点 Q，使 $PQ\perp AE$，若存在，指出点 Q 位置，若不存在说明理由；

(3)若 $PA=2,PD$ 与平面 PBC 成角大小 30°，求 DC 边长.

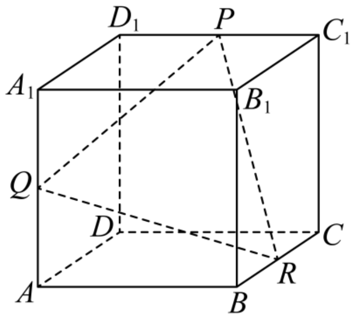
四、单选题（本大题共4小题）

19．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2},AB=AC=AA_1$，则直线 A_1B 与直线 AC_1 所成的角为（　　）



A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

20．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，其中 P,Q,R 分别是棱 C_1D_1,AA_1,BC 的中点，则 B 到平面 PQR 的距离是（　　）



A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{6}$

21．如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=\sqrt{3}$，点 E 在 AB 边上，$CE\perp DE$ 且 $AE=1$.如图 2，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 向上折起至 A_1 位置，连结 A_1C.记二面角 $A-DE-A_1$ 的大小为 θ，当 $\theta\in(0,\pi)$ 时，下面四个结论中错误的是（　　）

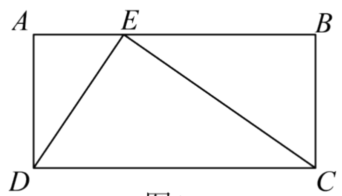


图1

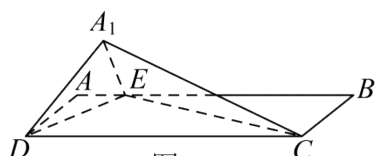


图2

A．存在某个位置，使 $DA_1\perp CE$

B．存在某个位置，使平面 $A_1DE\perp$ 平面 A_1EC

C．存在某个位置，直线 BE 与平面 A_1DE 所成角为 60°

D．存在某个位置，使平面 A_1DE 与平面 A_1BC 的交线与平面 DEC 平行

22．光导纤维作为光的传输工具，在现代通讯中有着及其重要的作用，光纤由内部纤芯和外部包层组成（如图 1），在一定的条件下，光在纤芯中传输，传输原理是 “光的全反射”，即“入射角 α 等于反射角 β”（如图 2），在图 3 中近似的展示了一束光线在

一段较长的圆柱形 光纤中的传输路径，其中圆面 O_1,O_2,O_3 是与光纤轴垂直的纤芯截面，若 A_1A_2 与圆 O_2 所在平面成角的大小为 $\frac{\pi}{4},\cos\angle A_1A_2A_3=-\frac{3}{4}$，则光线路径在垂直于光纤轴的截面上的投影可能（　　）

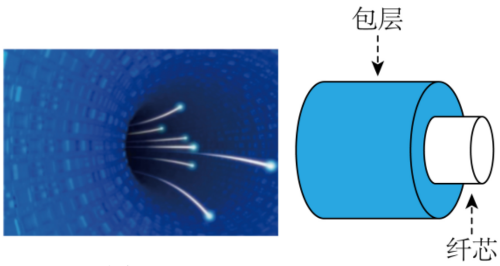


图1

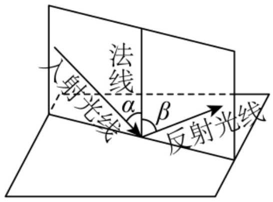


图2

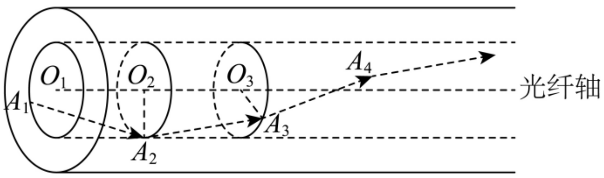
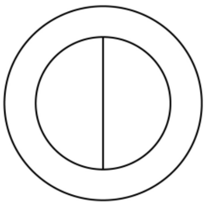
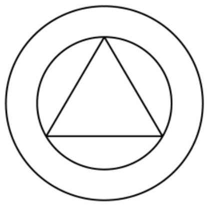
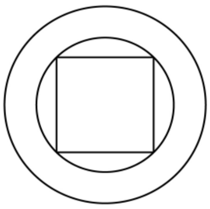
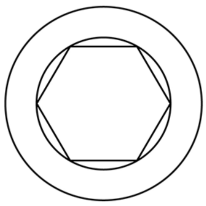


图3


A．


B．


C．


D．

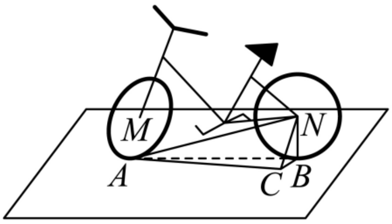
五、填空题（本大题共 6 小题）

23．直二面角 $P-AB-Q,PA=PB=\sqrt{2},AB=2,AQ=\sqrt{3},BQ=1$，则 $PQ=$_______________ ;三棱锥 $P-ABQ$ 外接球的体积是 _______________.

24．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2},P$ 为侧面 BB_1C_1C 内一动点（包括边界），Q 为棱 B_1C_1 上一动点（包括端点），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD_1}+|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值是 _______________.

25．如图，某一个自行车停放时，车体由尺寸相同的前后轮和脚撑来支撑，前后轮的轴中心分别为 M，N，与地面接触点分别为 A，B，脚撑一端固定在后轮轴中心 N 处，另一端与地面接触于点 C，若 A，B 两点间距离为 110 厘米，车轮外径（直径）为

66厘米，脚撑长度等于车轮半径，$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}, \angle BAC=\frac{\pi}{12}$，$NB\perp AB$，则后车轮所在平面与地面的夹角（即二面角 $N-AB-C$）的余弦值为_______________.



26．将半径为 1 的半圆弧 $n\left(n\geq 2, n\in \mathbf{N}^*\right)$等分，从半径的一个端点 M 出发依次连接各个分点至半径的另一个端点 N，得到折线 $MA_1A_2\cdots A_{n-1}N$，将折线绕半径 MN 所在直线旋转，得到旋转体（ $n=5$时，如图所示），设所得旋转体的表面积为 S_n，给出下列四个结论：

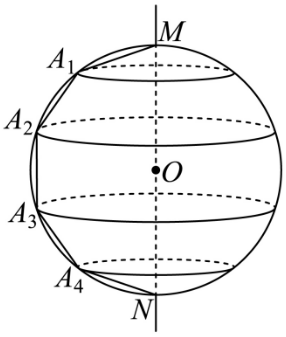


图1

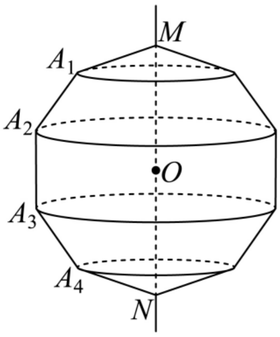


图2

① $S_2=2\sqrt{2}\pi$；

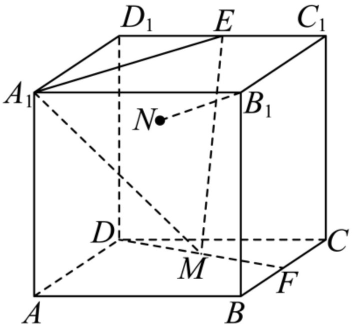
② $S_n<S_{n+1}$；

③ S_n最大值为 4π；

④ $S_n=4\pi\cos\frac{\pi}{2n}$.

其中所有正确结论的序号是 _____________.

27．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长 $2\sqrt{5}, E, F$ 分别为 D_1C_1, BC 中点， M 从 D 开始沿射线 DF 运动，做 $B_1N\perp$平面 A_1ME，垂足为 N，给出下列四个结论：



①平面 A_1ME 与平面 $ABCD$ 夹角先增大后减小；

②B_1N 最大值为 4，并且先增大后减小；

③存在 N 使得 $AN=CN$；

④存在唯一的 N 使得 $BN\perp DN$.

其中所有正确结论的序号是 ________.

28．蜜蜂分泌蜂蜡筑巢，蜂巢由许多中空的柱状体连接而成，其中柱状体的一端为正六边形开口，另一端由三个全等的菱形拼成类似锥形的底部（如图 1），蜜蜂这样筑巢能够使得蜂巢空间不变的条件下，所用蜂蜡最少，为了揭开蜜蜂筑巢的数学秘密，研学小组利用正六棱柱去研究中空的柱状体 .设正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 底面边长为 4，高为定值（大于底面边长），底面中心分别为 O,O_1（如图 2），现将 O_1O 延长至 P，平面 PFB，PBD，PDF 分别与棱 AA_1,CC_1,EE_1 交于 M，N，T，得到中空的柱状体（如图 3）.

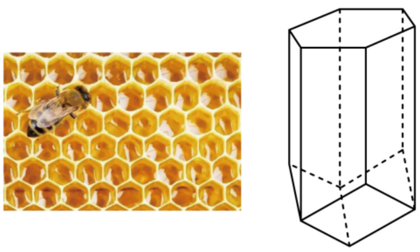


图1

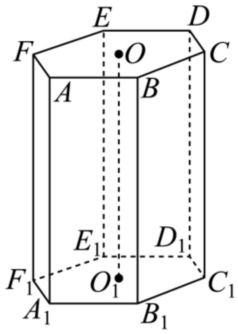


图2

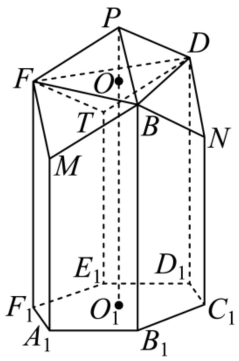


图3

（1）比大小：所得中空的柱状体的体积 ________ 原正六棱柱体积；（填“>”，“<”或“=”）

（2）当中空的柱状体表面积最小时，PO 的取值是 ________.

答案

1．【正确答案】C

【详解】由 $A(1,-2,3),B(3,0,-1)$ 可得 $\overrightarrow{AB}=(3,0,-1)-(1,-2,3)=(2,2,-4)$.

故选：C

2．【正确答案】D

【详解】若 $l\cap\alpha=P,n\subset\alpha$，则 l 与 n 异面或 $l\bigcap n=P$，故 A 错误；

若 $m//n,n\subset\alpha$，则 $m//\alpha$ 或 $m\subset\alpha$，故 B 错误；

若 $l\perp m,l\perp n,m\subset\alpha,n\subset\alpha$，当 $m\bigcap n=P$ 时，可得 $l\perp\alpha$，

若 $m\parallel n$，可能有 $l\parallel\alpha$，故 C 错误；

若 $\alpha\perp\beta$，设 $\alpha\cap\beta=c$，在 α 内作直线 $b\perp c$，则 $b\perp\beta$，

又 $n\perp\beta$，所以 $b\parallel n$，又 $m\perp\alpha$，所以 $m\perp b$，所以 $m\perp n$，故 D 正确.

故选：D.

3．【正确答案】D

【详解】解：点 Q 是 AB 靠近 B 的三等分点，

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PC}$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{PC}$

$=\overrightarrow{PA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PC}$

$=\overrightarrow{PA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})-\overrightarrow{PC}$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$.

故选：D.

4．【正确答案】D

【详解】设圆锥底面半径为 r，母线长 l，则圆锥的高为 $\sqrt{l^2-r^2}$，

由圆锥的侧面积等于和它等高等底的圆柱的侧面积，

所以可得 $\dfrac{1}{2}2\pi r\cdot l=2\pi r\cdot\sqrt{l^2-r^2}$，所以 $l=2\sqrt{l^2-r^2}$，解得 $\dfrac{r}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

设母线与底面所成的角为 $\alpha(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，

所以圆锥轴截面顶角的度数为 $\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

故选：D.

5．【正确答案】C

【详解】当 $n//\alpha$ 时，由于 $m//n,m\not\subset\alpha$，可以得到 $m//\alpha$，充分性成立，

但 $m//\alpha$ 不能推出 $n//\alpha$，因为 n 可能在 α 内，必要性不成立 .

故选：C

6．【正确答案】B

【详解】因为直线 l 的方向向量为 $\overrightarrow{m}=(1,0,2)$，

所以取直线 l 的一个单位方向向量为 $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{m}|}=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})$，

由 $A(0,1,0)$， $B(-1,2,3)$，可得 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,3)$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$， $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$，

所以 $d=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2-(\overrightarrow{AB}\bullet\vec{u})^2}=\sqrt{6}$.

故选：B.

7．【正确答案】A

【详解】设正三角形的边长为 a，由正三角形性质可得顶点到三角形中心的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

因此正三棱锥的侧棱长要大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$，即侧棱长大于底面边长的 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 倍，

易知 $\frac{7}{10}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此可能是正三棱锥，即 A 正确；

设正方形的边长为 b，易知正方形对角线的一半为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

因此正四棱锥的侧棱长要大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，即侧棱长大于底面边长的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，

易知 $\frac{7}{10}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 B 错误；

以此类推可知正五棱锥、正六棱锥的侧棱长都大于底面边长的 $\frac{7}{10}$ 倍，即 CD 不合题意 .

故选：A

8．【正确答案】A

【详解】如图所示，将正三棱锥的三个侧面展开到同一平面内，

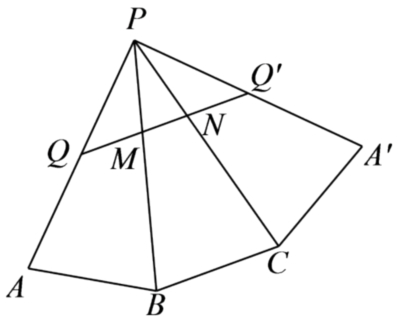
PA 对应于 PA'，点 Q 对应点 Q'，连接 QQ'，分别交 PB,PC 于点 M,N，

故 $QQ'=QM+MN+NQ'$，

则 QQ' 的长即为三角形 QMN 周长的最小值，

其中 $\angle APA'=3\angle APB=\frac{\pi}{2}$，$PQ=PQ'=1$，

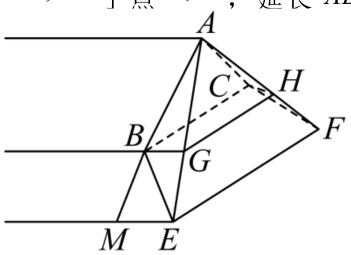
由勾股定理得 $QQ'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.



故选：A

9. 【正确答案】D

【详解】依题意截取歇山顶右半部分作为示意图，连接 AE,AF，延长 BB_1,CC_1 分别交 AE,AF 于点 G,H，延长 AB 交 E_1E 于点 M，如下图所示：



由 $E_1E\subset$ 平面 ABB_1A_1，$F_1F\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以可得 $GH//EF$，且 $AM\subset$ 平面 ABB_1A_1，

由正三棱柱性质可得 $AM\perp ME$，且 $GH=BC=4,\frac{GH}{EF}=\frac{AB}{AM}=\frac{2}{3}$，

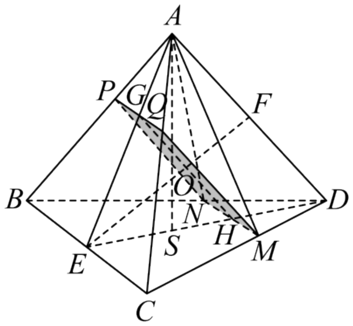
又 $AB=2\sqrt{2}$ 可得 $AM=3\sqrt{2}$，

利用勾股定理可得 $AE^2=AM^2+\left(\frac{20-18}{2}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+1=19$，可得 $AE=\sqrt{19}$.

故选：D

10. 【正确答案】D

【详解】



设截面分别于 AC、CD BD 交于点 Q、M N，连接 AN、AM，

取 BC、AD 的中点 E、F，连接 AE、DE，分别交 PQ、NM 于点 G、H，EF 交 GH 于点 O，

由于 $AE\perp BC,DE\perp BC$，$AE\cap DE=E,AE,DE\subset$ 平面 ADE，

所以 $BC\perp$ 平面 ADE，而 $AD\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp AD$，

又 $BC//$ 平面 $PQMN$，$BC\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $PQMN=PQ$，

所以 $BC//PQ$，同理 $BC//NM$，$AD//QM$，$AD//PN$，所以 $PQ\perp QM$，

则四边形 $PQMN$ 为矩形，

平面 $PQMN\cap$ 平面 $ADE=GH$，所以 $AD//GH$，则 O 为 GH 的中点，

又 $AE=DE$，则 $EF\perp AD$，则 $EF\perp PQ,EF\perp QM$，

$PQ\cap QM=Q,PQ,QM\subset$ 平面 $PQMN$，所以 $EF\perp$ 平面 $PQMN$，

则点 A 到平面 $PQMN$ 的距离为 OF，

因为 $AP=x(0<x<2)$，则 $BP=2-x=PN=GH$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，

又 $\triangle EGH\sim\triangle EAD$，则 $\dfrac{GH}{AD}=\dfrac{EO}{EF}$，即 $\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{EO}{\sqrt{2}}$，则 $OE=\dfrac{2-x}{\sqrt{2}}$，

所以 $OF=\sqrt{2}-\dfrac{2-x}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，

而正四面体的高 $AS=\sqrt{AE^2-ES^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以 $V(x)=V_{A-PQMN}+V_{A-MND}=\dfrac{1}{3}\times(2-x)x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}x^2\sin\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(2x^2-x^3\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$，

则 $V'(x)=\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$V'(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,2)$ 时，$V'(x)$ 单调递减，

则 $V(x)$ 在 $(0,1)$ 切线斜率增大，在 $(1,2)$ 切线斜率减小，故选择图象 D.

故选：D

11．【正确答案】-3

【详解】根据题意：$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{CD}=(-2,m-2,n-5)$,

因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $(-2,m-2,n-5)=\lambda(1,2,3)$,

则 $\begin{cases}-2=\lambda\\ m-2=2\lambda\\ n-5=3\lambda\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\lambda=-2\\ m=-2\\ n=-1\end{cases}$，则 $m+n=-3$.

故答案为 .-3

12．【正确答案】　②③　①

【详解】若① $\alpha\perp\beta$，② $n\perp\alpha$ 可得 $n//\beta$ 或 $n\subset\beta$，即①②推不出③；

若① $\alpha\perp\beta$，③ $n//\beta$，可能出现 $n\subset\alpha$ 的情况，因此①③推不出②；

若② $n\perp\alpha$，③ $n//\beta$，可得① $\alpha\perp\beta$，即②③可以推出①.

故②③；①

13．【正确答案】　$\frac{\pi}{6}$　$2+2\sqrt{2}$

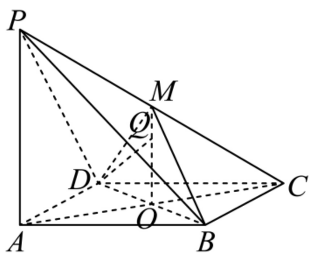
【详解】因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PAC$ 为 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角，

又底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=2$，$\angle DAB=60^\circ$，所以 $\angle ADC=120^\circ$，

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理可得 $AC=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ}=2\sqrt{3}$，

在 $\triangle PAC$ 中，$\tan\angle PCA=\frac{PA}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle PCA=\frac{\pi}{6}$；

取 PC 的中点 M，连接 BD 交 AC 于 O，连接 MO，



由底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$ 且 O 为 AC 的中点，

所以 $MO//PA$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$OM\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $MO\perp AC$，又 $OM\cap BD=O$，$OM,BD\subset$ 平面 BDM，所以 $AC\perp$ 平面 BDM，

又 $DQ\perp AC$，Q 点在四棱锥 $P-ABCD$ 表面上，

所以 Q 点所形成的轨迹为线段 BD,BM,DM，

由 $\angle DAB=60^\circ$，$AD=AB=2$，所以可得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $BD=2$，

易求得 $PB=2\sqrt{2}$， $PC=4$，在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle PCB=\dfrac{16+4-8}{2\times2\times4}=\dfrac{3}{4}$，

在 $\triangle MBC$ 中，由余弦定理可得 $MB^2=CM^2+CB^2-2CM\bullet CB\bullet\cos\angle PCB=4+4-6=2$，

所以 $MB=\sqrt{2}$，易证 $\triangle PCB\cong$ PCD，从而可得 $DM=MB=\sqrt{2}$，

所以 Q 点所形成的轨迹长度是 $2+2\sqrt{2}$.

故 $\dfrac{\pi}{6}$； $2+2\sqrt{2}$.

14．【正确答案】$\sqrt{5}$

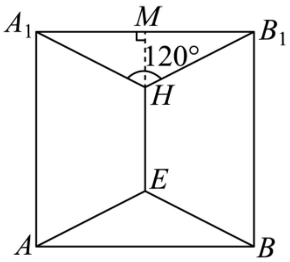
【详解】依题意可得正棱台 $EFGH-BCC_1B_1$ 下底面边长为 $2\sqrt{3}$，高为 $\sqrt{3}$，

在前面观察图形（如下图所示）中可知 HE 即为上底面边长， $HA_1=HB_1$，则

$\angle HB_1A_1=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$，

作 $HM\perp A_1B_1$ 交 A_1B_1 于点 M，则 M 为 A_1B_1 的中点，所以 $B_1M=\sqrt{3}$，

则 $MH=B_1M\tan\angle HB_1A_1=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=1$，



所以上底面边长为 $2\sqrt{3}-2MH=2\sqrt{3}-2$，

则下底面正方形的对角线为 $\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{6}$，

上底面正方形的对角线为 $\sqrt{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2+\left(2\sqrt{3}-2\right)^2}=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，

所以正棱台 $EFGH-BCC_1B_1$ 的侧棱长为 $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left[\dfrac{2\sqrt{6}-\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)}{2}\right]^2}=\sqrt{5}$.

故 $\sqrt{5}$

15．【正确答案】①②

【详解】对于①， $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\square ABCD}\cdot PO=\dfrac{1}{3}\times2\times2\times1=\dfrac{4}{3}$，①正确；

对于②， Q $BC//AD$， $BC\not\subset$ 平面 PAD， $AD\subset$ 平面 PAD， $\therefore BC//$ 平面 PAD，

$\because$ 平面 $PAD\cap$ 平面 $PBC=l$， $BC\subset$ 平面 PBC， $\therefore l//BC$，②正确；

对于③，取 AD,BC 中点 E,F，连接 OD,OA，

$\because PO \perp$ 平面 $ABCD$， $PA = PD$， $\therefore OA = OD$， $\therefore OE \perp AD$，

又四边形 $ABCD$ 正方形， $\therefore AB \perp AD$， $\therefore OE // AB$， 即 E, O, F 三点共线；

$\because OF \perp BC$， $PO \perp BC$， $\therefore BC \perp$ 平面 POF， 又 $PF \subset$ 平面 POF， $\backslash$ BC ^ PF；

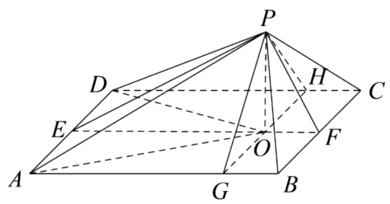
设 $OE = m\left(0 < m < 2\right)$，则 $OF = 2 - m$， $\therefore PE = \sqrt{m^2 + 1}$， $PF = \sqrt{\left(2 - m\right)^2 + 1}$，

$\therefore S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} AD \cdot PE + \frac{1}{2} BC \cdot PF = PE + PF = \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{\left(2 - m\right)^2 + 1}$；

过 O 作 $HG // AD$，分别交 AB, CD 于点 G, H，

$\because AB \perp OG$， $AB \perp PO$， $\therefore AB \perp$ 平面 POG，又 $PG \subset$ 平面 POG， $\therefore AB \perp PG$，

同理可得： $CD \perp PH$；



$\because OH = OG = \frac{1}{2} AD = 1$， $\therefore PH = PG = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} AB \cdot PG + \frac{1}{2} CD \cdot PH = 2\sqrt{2}$，又 $S_{\square ABCD} = AB \cdot BC = 4$，

$\therefore$ 四棱锥 $P - ABCD$ 的表面积 $S = 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{\left(2 - m\right)^2 + 1}$

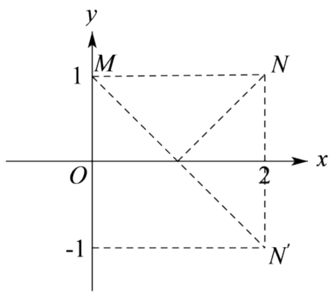
$= 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(m - 0\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2} + \sqrt{\left(m - 2\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2}$；

$\because \sqrt{\left(m - 0\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2} + \sqrt{\left(m - 2\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2}$ 的几何意义表示点 $\left(m, 0\right)$ 到点 $M\left(0, 1\right)$ 和 $N\left(2, 1\right)$ 的距离之和，

Q N 关于 x 轴对称的点为 $N'\left(2, -1\right)$，

$\therefore \left(\sqrt{\left(m - 0\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2} + \sqrt{\left(m - 2\right)^2 + \left(0 - 1\right)^2}\right)_{\min} = \left|MN'\right| = 2\sqrt{2}$，无最大值，

即四棱锥 $P - ABCD$ 的表面积有最小值，无最大值， ③错误；



对于④，以 O 为坐标原点， $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OP}$ 正方向为 x, y, z 轴正方向，可建立如图空间直角坐标系，