

深州中学 2023~2024 学年第一学期高二期末考试数学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑：非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。
5. 本卷主要考查内容：选择性必修第一册选择性必修第二册第五章 5.3.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知复数 z 满足 $z + 2\bar{z} = 3 + 4i$ (i 是虚数单位)，则 $z =$ ()

- A. $1 - 4i$ B. $6 - 4i$ C. $6 - 2i$ D. $3 - 2i$

【答案】A

【解析】

【分析】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，求得 $z + 2\bar{z} = 3a - bi$ ，根据题意求得 a, b 的值，即可求解。【详解】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，可得 $z + 2\bar{z} = a + bi + 2(a - bi) = 3a - bi$ 因为 $z + 2\bar{z} = 3 + 4i$ ，所以 $3a - bi = 3 + 4i$ 解得 $a = 1, b = -4$ ，所以 $z = 1 - 4i$ 。

故选：A.

2. 设 $f(x) = ax^3 + x$ ，若 $f'(-1) = 4$ ，则 $a =$ ()

- A. 1 B. -2 C. 3 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】根据导数值直接构造方程求解即可。

【详解】Q $f'(x) = 3ax^2 + 1$, $\therefore f'(-1) = 3a + 1 = 4$, 解得: $a = 1$.

故选: A.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_7 = 12$, $a_{15} = 3$, 则 $a_{11} =$ ()

A. 3

B. 6

C. 3 或 -3

D. 6 或 -6

【答案】B

【解析】

【分析】利用等比数列的通项公式求解.

【详解】解: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

则 $a_{15} = a_7 q^8$,

所以 $q^8 = \frac{1}{4}$, $q^4 = \frac{1}{2}$,

所以 $a_{11} = a_7 q^4 = 6$.

故选: B.

4. 双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{18} = 1$ 的渐近线方程为 ()

A. $y = \pm\sqrt{3}x$

B. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C. $y = \pm 3x$

D. $y = \pm\frac{1}{3}x$

【答案】B

【解析】

【分析】根据双曲线的方程和几何性质可得答案.

【详解】由双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{18} = 1$ 可得 $a = \sqrt{6}$, $b = 3\sqrt{2}$,

所以渐近线方程为 $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选: B.

5. 已知直线 $3x+4y+a=0$ 与圆 $C:(x-2)^2+y^2=9$ 相交于 A, B 两点, 且 $\angle ACB=120^\circ$, 则实数 $a=$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{23}{2}$ D. $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{27}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】设圆心 C 到直线 AB 的距离为 d , $\angle ACB=120^\circ$ 可得 $d=\frac{3}{2}$, 利用点到直线距离公式求 a .

【详解】设圆心 C 到直线 AB 的距离为 d ,

$\because$ 圆的方程为 $C:(x-2)^2+y^2=9 \therefore$ 圆心 $C(2,0)$, 圆的半径为 3, $|CA|=|CB|=3$,

又 $\angle ACB=120^\circ$, $\therefore d=\frac{3}{2}$, 即点 C 到直线 AB 的距离为 $\frac{3}{2}$,

所以 $\frac{|3 \times 2 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{2}$, 所以解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = -\frac{27}{2}$.

故选: D.

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}(n \geq 1)$, 则 $\{a_n\}$ 的前 2024 项和为 ()

- A. 589 B. 590 C. $\frac{1771}{3}$ D. $\frac{3541}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】由递推公式写出前 5 项, 发现数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列, 从而利用周期可得结果.

【详解】因为 $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}(n \geq 1)$,

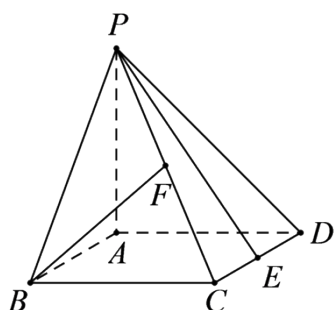
所以 $a_2=\frac{1+3}{1-3}=-2, a_3=\frac{1+(-2)}{1-(-2)}=-\frac{1}{3}, a_4=\frac{1+(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1}{2}, a_5=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3,$

而 $a_5=a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列,

所以 $\{a_n\}$ 的前 2024 项和 $T_{2024}=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2024}=506(a_1+a_2+a_3+a_4)=\frac{1771}{3}$.

故选：C

7. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA=BC$ ， E 为 CD 的中点， F 为 PC 的中点，则异面直线 BF 与 PE 所成角的正弦值为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{78}}{9}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】如图建立空间直角坐标系，求出 $\vec{BF}$ 和 $\vec{PE}$ 的坐标，利用空间向量夹角公式计算夹角的余弦值，再由同角三角函数基本关系即可求解.

【详解】因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB, AD \subset$ 面 $ABCD$ ，可得 $PA \perp AB$ ， $PA \perp AD$ ，
因为四边形 $ABCD$ 为正方形，可得 $AB \perp AD$ ，
所以 AB, AD, AP 两两垂直，如图分别以 AB, AD, AP 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，设 $AB=2$ ，则 $PA=2$ ，

可得 $B(2,0,0)$ ， $P(0,0,2)$ ， $C(2,2,0)$ ， $F(1,1,1)$ ， $E(1,2,0)$ ，

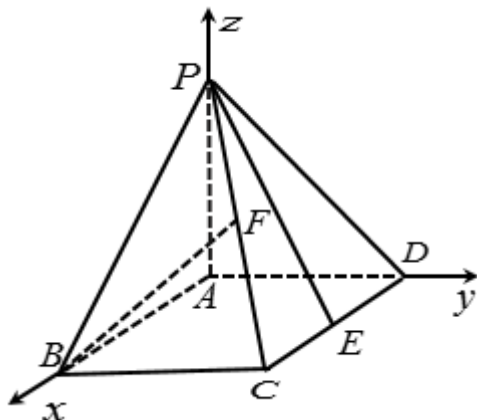
所以 $\vec{BF}=(-1,1,1)$ ， $\vec{PE}=(1,2,-2)$ ，

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{BF}, \vec{PE} \rangle = \frac{\vec{BF} \cdot \vec{PE}}{|\vec{BF}| \cdot |\vec{PE}|} = \frac{-1+2-2}{\sqrt{3} \times 3} = -\frac{\sqrt{3}}{9},$$

设异面直线 BF 与 PE 所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{BF}, \vec{PE} \rangle \right| = \frac{\sqrt{3}}{9}, \text{ 所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{9} \right)^2} = \frac{\sqrt{78}}{9},$$

故选：A.



8. 已知 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点，经过原点 O 的直线 l 与椭圆 E 交于 P, Q 两点，若

$|PF| = 3|QF|$ ，且 $\angle PFQ = 120^\circ$ ，则椭圆 E 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意设椭圆右焦点为 F' ，根据椭圆的定义以及余弦定理可求出 a, c 的关系，即可求出椭圆的离心率.

【详解】设椭圆右焦点为 F' ，连接 PF' ， QF' ，

根据椭圆对称性可知四边形 $PFF'Q$ 为平行四边形，则 $|QF| = |PF'|$ ，

因为 $\angle PFQ = 120^\circ$ ，可得 $\angle FPF' = 60^\circ$ ，所以 $|PF| + |PF'| = 4|PF'| = 2a$ ，

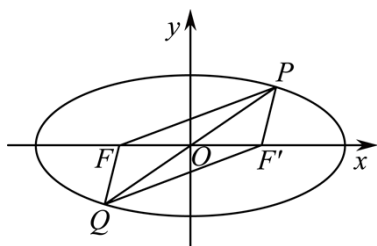
则 $|PF'| = \frac{1}{2}a$ ， $|PF| = \frac{3}{2}a$ ，

由余弦定理可得 $(2c)^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 - 2|PF||PF'| \cos 60^\circ = (|PF| + |PF'|)^2 - 3|PF||PF'|$ ，

即 $4c^2 = 4a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{7}{4}a^2$ ，即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{7}{16}$.

故椭圆离心率 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

故选：C.



9. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = -7$, $S_2 = -12$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a_n = 2n - 9$ B. $\{a_n\}$ 为递减数列
- C. $a_3 + a_6 = 0$ D. $S_7 = a_1$

【解析】

【分析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，根据题意，求得 $d=2$ ，得到 $a_n=2n-9$ ，逐项判定，即可求解.

【详解】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_1 = -7, S_2 = -12$, 可得 $a_2 = S_2 - a_1 = -12 - (-7) = -5$, 解得 $d = 2$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + 2(n-1) = 2n-9$ ，所以 A 正确；

因为 $d = 2 > 0$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 B 错误；

由 $a_3 = -3, a_6 = 3$, 可得 $a_3 + a_6 = 0$, 所以 C 正确;

因为 $S_7 = 7 \times (-7) + \frac{7 \times 6}{2} \times 2 = -7$ ，所以 $S_7 = a_1$ ，所以 D 正确.

故选: ACD.

10. 已知函数 $f(x) = xe^x$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $y = f(x)$ 存在极小值
- B. $f\left(\frac{1}{5}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right)$
- C. 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$
- D. 若函数 $g(x) = f(x) - kx$ 有且仅有两个零点, 则 $k > 0$ 且 $k \neq 1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求导，再利用导数求出函数的单调区间，再根据极值的定义即可判断 A；根据函数的单调性即可判断 B；根据指数函数的性质即可判断 CD.

【详解】 $f'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

故函数在 $x = -1$ 处取得极小值, 也是最小值, 没有极大值, A 正确;

当 $x > -1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 且 $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, 所以 $f\left(\frac{1}{5}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$, B 错误;

当 $x < 0$ 时, $xe^x < 0$, 易知 C 正确;

由 $f(x) = kx$ 得 $x(e^x - k) = 0$, 若函数 $g(x)$ 有两个零点, 只需 $k > 0$ 且 $k \neq 1$, D 正确.

故选: ACD.

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 12x$, 点 F 是抛物线 C 的焦点, 点 P 是抛物线 C 上的一点, 点 $M(4, 3)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 抛物线 C 的准线方程为 $x = -3$

B. 若 $|PF| = 7$, 则 $\triangle PMF$ 的面积为 $2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

C. $|PF| - |PM|$ 的最大值为 $\sqrt{10}$

D. $\triangle PMF$ 的周长的最小值为 $7 + \sqrt{10}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据抛物线的标准方程可得准线方程为 $x = -3$, 即可判断 A, 根据抛物线定义得到 $x_P = 4$, 故 P 点可能在第一象限也可能在第三象限, 分情况计算三角形面积即可判断 B, 利用三角形任意两边之差小于第三边结合三点一线的特殊情况即可得到 $\therefore (|PF| - |PM|)_{\max} = |MF|$, 计算即可判断 C, 三角形 PMF 的周长 $= |PM| + |MF| + |PF| = |PM| + |PF| + \sqrt{10}$, 再结合抛物线定义即可求出 $|PM| + |PF|$ 的最小值, 即得到周长最小值.

【详解】 $Q y^2 = 12x$, $\therefore p = 6$, $\therefore F(3, 0)$, 准线方程为 $x = -3$, 故 A 正确;

根据抛物线定义得 $|PF| = x_P + \frac{p}{2} = x_P + 3 = 7$, $x_P = 4$, $Q M(4, 3)$,

$\therefore PM \parallel y$ 轴, 当 $x = 4$ 时, $y = \pm 4\sqrt{3}$,

若 P 点在第一象限时, 此时 $P(4, 4\sqrt{3})$,

故 $PM = 4\sqrt{3} - 3$, $\triangle PMF$ 的高为 1, 故 $S_{\triangle PMF} = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - 3) \times 1 = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$,

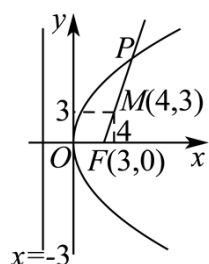
若点 P 在第四象限, 此时 $P(4, -4\sqrt{3})$, 故 $PM = 4\sqrt{3} + 3$,

$\triangle PMF$ 的高为 1, 故 $S_{\triangle PMF} = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} + 3) \times 1 = 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}$, 故 B 错误;

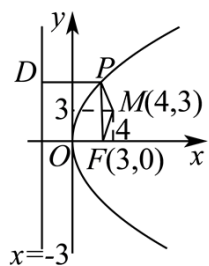
$Q |PF| - |PM| \leq |MF|$, $\therefore (|PF| - |PM|)_{\max} = |MF| = \sqrt{(4-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$, 故 C 正确;

(连接 FM , 并延长交于抛物线于点 P , 此时即为 $|PF| - |PM|$ 最大值的情况,

图对应如下)



过点 P 作 $PD \perp$ 准线, 垂足为点 D ,



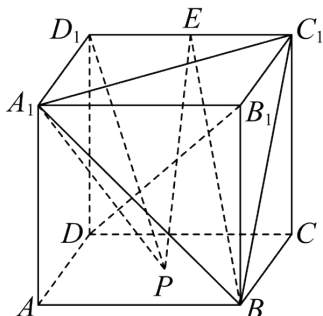
$\triangle PMF$ 的周长 $= |PM| + |MF| + |PF| = |PM| + |PF| + \sqrt{10} = |PM| + |PD| + \sqrt{10}$,

若周长最小, 则 $|PM| + |PD|$ 长度和最小, 显然当点 P, M, D 位于同一条直线上时, $|PM| + |MF|$ 的和最小,

此时 $|PM| + |MF| = |PD| = 7$,

故周长最小值为 $7 + \sqrt{10}$, 故 D 正确.

12. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 D_1C_1 的中点，点 P 是底面 $ABCD$ 上的一点，且 $D_1P \parallel$ 平面 A_1C_1B ，则下列说法正确的是（ ）



- A. $D_1P \perp DB_1$
- B. 存在点 P ，使得 $A_1P \perp BE$
- C. D_1P 的最小值为 $\sqrt{6}$
- D. $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PE}$ 的最大值为 6

【分析】建立坐标系，利用空间向量判断位置关系和求解长度、数量积等.

又 $D_1P \parallel$ 平面 A_1C_1B , 所以 $DB_1 \perp D_1P$. 故 A 正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/656021114024011030>