

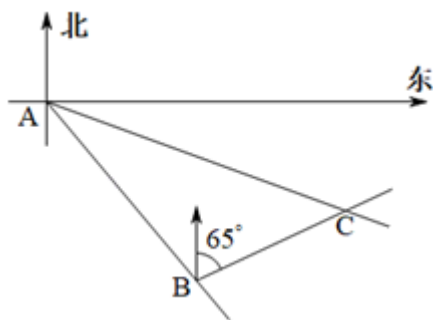
俯视图

- A. $2\sqrt{5}$ B. 4 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

5. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{4}{(1-i)^2} =$ ()

- A. $2i$ B. $-2i$ C. 2 D. -2

6. 一艘海轮从 A 处出发，以每小时 24 海里的速度沿南偏东 40° 的方向直线航行，30 分钟后到达 B 处，在 C 处有一座灯塔，海轮在 A 处观察灯塔，其方向是南偏东 70° ，在 B 处观察灯塔，其方向是北偏东 65° ，那么 B, C 两点间的距离是 ()



- A. $6\sqrt{2}$ 海里 B. $6\sqrt{3}$ 海里 C. $8\sqrt{2}$ 海里 D. $8\sqrt{3}$ 海里

7. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ ，若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，若 $f(a) \leq f(3a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

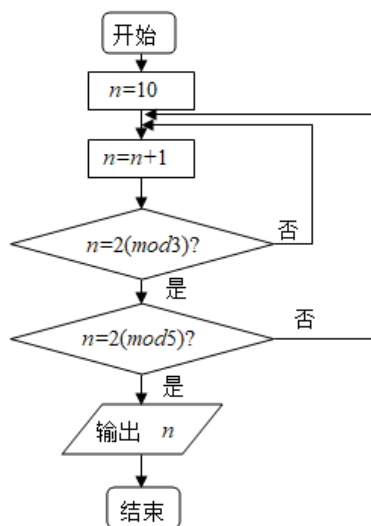
8. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ，则 $\neg p$ 是 ()

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ B. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 \leq 0$
C. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 > 0$ D. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 \leq 0$

9. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，则双曲线的焦距为 ()

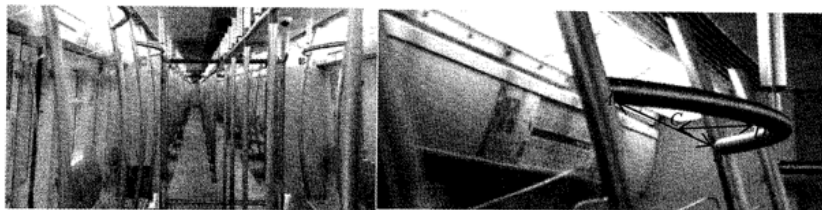
- A. $2\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 6 D. 8

10. 下边程序框图的算法源于我国古代的中国剩余定理.把运算“正整数 N 除以正整数 m 所得的余数是 n ”记为“ $N \equiv n \pmod{m}$ ”，例如 $7 \equiv 1 \pmod{2}$.执行该程序框图，则输出的 n 等于 ()



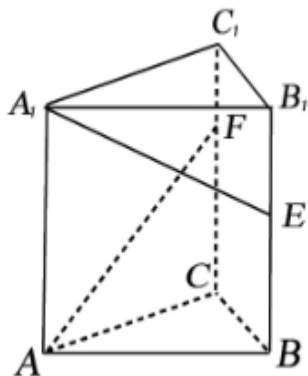
- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

11. 在很多地铁的车厢里，顶部的扶手是一根漂亮的弯管，如下图所示．将弯管形状近似地看成是圆弧，已知弯管向外的最大突出(图中 CD)有 15cm ，跨接了 6 个坐位的宽度(AB)，每个座位宽度为 43cm ，估计弯管的长度，下面的结果中最接近真实值的是 ()



- A. 250cm B. 260cm C. 295cm D. 305cm

12. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面为正三角形，侧棱垂直底面， $AB=4$ ， $AA_1=8$.若 E ， F 分别是棱 BB_1 ， CC_1 上的点，且 $BE=B_1E$ ， $C_1F=\frac{1}{4}CC_1$ ，则异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{10}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，

若 $2\cos A(b\cos C + c\cos B) = a = \sqrt{13}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，

则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b+c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，则该双曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 设集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知函数 $f(x) = -x^3 + x + a, x \in [\frac{1}{e}, e]$ 与 $g(x) = 3\ln x - x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点，则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(2, 0)$ 。

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时，求线段 AB 的中点的横坐标；

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C ，求证： M, B, C 三点共线；

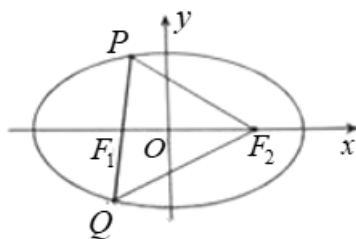
(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点，若椭圆上存在点 P ，使得 $\vec{OG} + \vec{OH} = \lambda \vec{OP}$ (其中 O 为坐标原点)，求实数 λ 的取值范围。

18. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $c=2a$ ， $b\sin B - a\sin A = \frac{1}{2}a\sin C$ 。

(I) 求 $\sin B$ 的值；

(II) 求 $\sin(2B + \frac{\pi}{3})$ 的值。

19. (12 分) 如图，已知椭圆 E 的右焦点为 $F_2(1, 0)$ ， P, Q 为椭圆上的两个动点， $\triangle PQF_2$ 周长的最大值为 8。



(I) 求椭圆 E 的标准方程；

(II) 直线 l 经过 F_2 ，交椭圆 E 于点 A, B ，直线 m 与直线 l 的倾斜角互补，且交椭圆 E 于点 M, N ，

$|MN|^2 = 4|AB|$ ，求证：直线 m 与直线 l 的交点 T 在定直线上。

20. (12 分) a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边。已知 $a=3$ ， $c\sin C = a\sin A + b\sin B$ ，且 $B=60^\circ$ 。

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 若 D, E 是 BC 边上的三等分点，求 $\sin \angle DAE$ 。

21. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$, 且曲线 C 的左焦点 F 在直线 l 上.

(I) 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程;

(II) 求曲线 C 的内接矩形的周长的最大值.

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边分别是 a, b, c , 其中 $a = 2, c = \sqrt{3}$.

(1) 若角 A 为锐角, 且 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin B$ 的值;

(2) 设 $f(C) = \sqrt{3} \sin C \cos C + 3 \cos^2 C$, 求 $f(C)$ 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

准确画图, 由图形对称性得出 P 点坐标, 代入圆的方程得到 c 与 a 关系, 可求双曲线的离心率.

【详解】

设 PQ 与 x 轴交于点 A , 由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴,

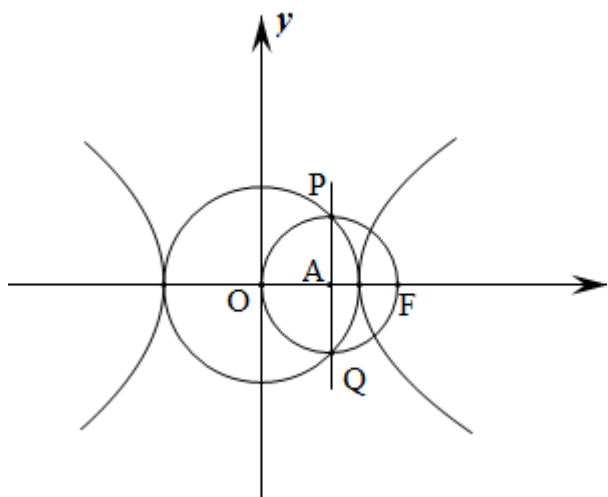
又 $Q|PQ| = |OF| = c$, $\therefore |PA| = \frac{c}{2}$, $\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径,

$\therefore A$ 为圆心 $|OA| = \frac{c}{2}$.

$\therefore P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$, 又 P 点在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上,

$\therefore \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2$, 即 $\frac{c^2}{2} = a^2$, $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$.

$\therefore e = \sqrt{2}$, 故选 A.



【点睛】

本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来。

2、B

【解析】

由命题的否定，复合命题的真假，充分必要条件，四种命题的关系对每个命题进行判断。

【详解】

“ $\forall x \in R, x^2 + 5x > 6$ ”的否定是“ $\exists x \in R, x^2 + 5x \leq 6$ ”，正确；

已知为两个命题，若“ $p \vee q$ ”为假命题，则“ $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ”为真命题，正确；

“ $a > 2019$ ”是“ $a > 2020$ ”的必要不充分条件，错误；

“若 $xy = 0$ ，则 $x = 0$ 且 $y = 0$ ”是假命题，则它的逆否命题为假命题，错误。

故选：B。

【点睛】

本题考查命题真假判断，掌握四种命题的关系，复合命题的真假判断，充分必要条件等概念是解题基础。

3、C

【解析】

利用复数的四则运算可得 $z = -2 - i$ ，即可得答案。

【详解】

$$\because i(3+z) = 1+i, \therefore 3+z = \frac{1+i}{i} = 1-i,$$

$\therefore z = -2 - i$ ， $\therefore$ 复数 z 的虚部为 -1 。

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的四则运算、虚部概念，考查运算求解能力，属于基础题.

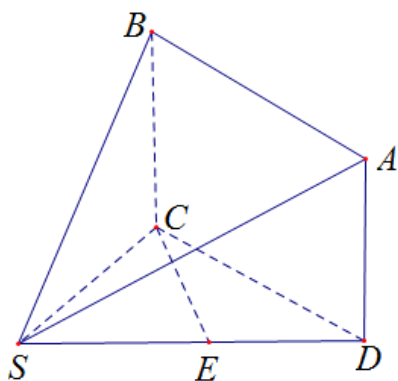
4、D

【解析】

先根据三视图还原几何体是一个四棱锥，根据三视图的数据，计算各棱的长度.

【详解】

根据三视图可知，几何体是一个四棱锥，如图所示：



由三视图知： $|AD|=2$ ， $|AE|=\sqrt{3}$ ， $|SD|=2$ ，

所以 $|SC|=|DC|=2$ ，

所以 $|SA|=\sqrt{|SD|^2+|AD|^2}=2\sqrt{2}$ ， $|SB|=\sqrt{|SC|^2+|BC|^2}=2\sqrt{2}$ ，

所以该几何体的最长棱的长为 $2\sqrt{2}$

故选：D

【点睛】

本题主要考查三视图的应用，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

5、A

【解析】

根据复数的基本运算求解即可.

【详解】

$$\frac{4}{(1-i)^2} = \frac{4}{-2i} = \frac{2i}{-i^2} = 2i.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了复数的基本运算,属于基础题.

6、A

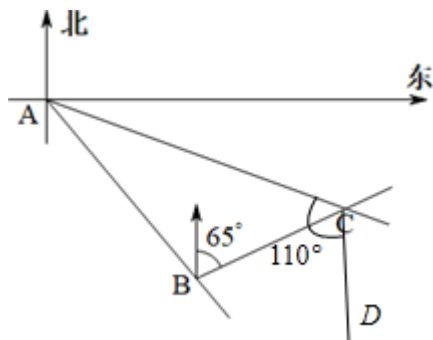
【解析】

先根据给的条件求出三角形 ABC 的三个内角, 再结合 AB 可求, 应用正弦定理即可求解.

【详解】

由题意可知: $\angle BAC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$, $\angle ACD = 110^\circ$, $\therefore \angle ACB = 110^\circ - 65^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. 又 $AB = 24 \times 0.5 = 12$.



在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$,

$$\text{即 } \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2}}, \therefore BC = 6\sqrt{2}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查正弦定理的实际应用, 关键是将给的角度、线段长度转化为三角形的边角关系, 利用正余弦定理求解. 属于中档题.

7、A

【解析】

根据题意, 分析可得函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称且在 $[2, +\infty)$ 上为减函数, 则不等式 $f(a) \leq f(3a+1)$ 等价于

$|a-2| \geq |3a-1|$, 解得 a 的取值范围, 即可得答案.

【详解】

解: 因为函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称,

因为 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数,

则 $f(a) \leq f(3a+1) \Leftrightarrow f(|a-2|) \leq f(|3a+1-2|) \Leftrightarrow |a-2| \geq |3a-1|$,

解得: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

即实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数的对称性与单调性的综合应用, 涉及不等式的解法, 属于综合题.

8、B

【解析】

根据全称命题的否定为特称命题, 得到结果.

【详解】

根据全称命题的否定为特称命题, 可得 $\neg p: \exists x_0 \in R, x_0^2 \leq 0$

本题正确选项: B

【点睛】

本题考查含量词的命题的否定, 属于基础题.

9、A

【解析】

依题意可得 $b^2 = 4$, 再根据离心率求出 a^2 , 即可求出 c , 从而得解;

【详解】

解: $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$,

所以 $e^2 = 1 + \frac{4}{a^2} = 3$, $\therefore a^2 = 2$, $\therefore c = \sqrt{6}$, 双曲线的焦距为 $2\sqrt{6}$.

故选: A

【点睛】

本题考查双曲线的简单几何性质, 属于基础题.

10、B

【解析】

由已知中的程序框图可知，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 n 的值，模拟程序的运行过程，代入四个选项进行验证即可.

【详解】

解：由程序框图可知，输出的数应为被 3 除余 2，被 5 除余 2 的且大于 10 的最小整数.

若输出 $n = 16$ ，则 $16 \equiv 1 \pmod{3}$ 不符合题意，排除；

若输出 $n = 17$ ，则 $17 \equiv 2 \pmod{3}, 17 \equiv 2 \pmod{5}$ ，符合题意.

故选:B.

【点睛】

本题考查了程序框图.当循环的次数不多，或有规律时，常采用循环模拟或代入选项验证的方法进行解答.

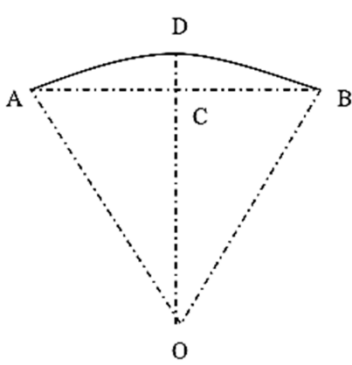
11、 B

【解析】

$\overset{\frown}{AB}$ 为弯管， AB 为 6 个座位的宽度，利用勾股定理求出弧 AB 所在圆的半径为 r ，从而可得弧所对的圆心角，再利用弧长公式即可求解.

【详解】

如图所示， $\overset{\frown}{AB}$ 为弯管， AB 为 6 个座位的宽度，



则 $AB = 6 \times 43 = 258cm$

$CD = 15cm$

设弧 AB 所在圆的半径为 r ， 则

$$r^2 = (r - CD)^2 + AC^2$$

$$= (r - 15)^2 + 129^2$$

解得 $r \approx 562cm$

$$\sin \angle AOD = \frac{129}{562} \approx 0.23$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/656021225035010235>