第二十一章 一元二次方程（压轴题专练）

一、填空题

1．（2023·全国·九年级专题练习）若关于 x 的一元二次方程 $(m+3)x^2-4x+mx+|m|+3=0$ 的常数项是 6，则一次项是（　　）

A．$-x$　　B．-1　　C．x　　D．1

【答案】A

【分析】根据一元二次方程定义可得 $|m|+3=6$，$m+3\neq 0$，可得 m 的值，再代入原方程，由此即可得结果．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $(m+3)x^2-4x+mx+|m|+3=0$ 的常数项是 6，

∴ $|m|+3=6$，$m+3\neq 0$，

解得：$m=3$，

把 $m=3$ 代入原方程可得 $6x^2-x+6=0$，

∴一次项是 $-x$，

故选：A．

【点睛】本题考查了一元二次方程的一般形式，解题的关键是熟练掌握一元二次方程的一般形式：一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，其中，ax^2 是二次项，bx 是一次项，c 是常数项．

2．（2023 春·福建南平·九年级专题练习）两个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $cx^2+bx+a=0$，其中 a，b，c 是常数，且 $a+c=0$，如果 $x=2020$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，那么下列各数中，一定是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的根的是（ ）

A．± 2020　　B．$-\dfrac{1}{2020}$　　C．-2020　　D．$\pm\dfrac{1}{2020}$

【答案】C

【分析】根据一元二次方程的定义以及一元二次方程的解法即可求出答案．

【详解】∵$a\neq 0$，$c\neq 0$，a+c=0

∴ $\dfrac{c}{a}=-1$，

∵$ax^2+bx+c=0$ 和 $cx^2+bx+a=0$，

∴ $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$，$\dfrac{c}{a}x^2+\dfrac{b}{a}x+1=0$，

$\therefore x^2+\frac{b}{a}x-1=0$，$x^2-\frac{b}{a}x-1=0$，

$\because x=2020$是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根，

$\therefore x=2020$是方程$x^2+\frac{b}{a}x-1=0$的一个根，

$\therefore x=-2020$是方程$x^2-\frac{b}{a}x-1=0$的一个根，

即$x=-2020$是方程$cx^2+bx+a=0$的一个根

故选：C．

【点睛】本题考查了一元二次方程，解题的关键是熟练运用一元二次方程的定义以及方程的解的概念．

3．（2023·全国·九年级假期作业）根据绝对值的定义可知$|x|=\begin{cases}x(x\geq 0)\\-x(x<0)\end{cases}$，下列结论正确的个数有（　）

①化简$|a|+|b|+|c|$一共有8种不同的结果；

②$|x+3|+|2-x|$的最大值是5；

③若$a_n=|3n-19|$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$（n为正整数），则当$S_n=1327$时，$n=35$；

④若关于x的方程$\left|\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right|=x+b$有2个不同的解，其中$b$为常数，则$-4<b<2$或$b>\frac{33}{12}$

A．4个　B．3个　C．2个　D．1个

【答案】C

【分析】由$|a|$、$|b|$、$|c|$的结果分别有2种，则$|a|+|b|+|c|$的结果共有$2\times2\times2=8$种，可判断①；根据x的取值，化简运算$|x+3|+|2-x|$即可判断②；根据

【详解】解：$\because|a|$、$|b|$、$|c|$的结果分别有2种，

$\therefore|a|+|b|+|c|$的结果共有$2\times2\times2=8$种，

故①正确；

当$x>2$时，$|x+3|+|2-x|=x+3+x-2=2x+1$，

当$0\leq x\leq 2$时，$|x+3|+|2-x|=x+3+2-x=5$，

当$-3\leqslant x<0$时，$|x+3|+|2-x|=3-x+2-x=5-2x$，

当$x<-3$时，$|x+3|+|2-x|=-x-3+2-x=-2x-1$，

故②错误；

$\because n$ 是正整数，

$\therefore a_n=|3n-19|=\begin{cases}19-3n,1\le n\le 6\\3n-19,n\ge 7\end{cases}$，

$S_6=16+13+10+7+4+1=51$，

$S_n=51+\dfrac{(2+3n-19)(n-6)}{2}$，$n\ge 7$，

当 $n=35$ 时，$S_n=51+\dfrac{(2+3\times 35-19)\times(35-6)}{2}=51+1276=1327$，

故③正确；

$\left|\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3},x\le -2\text{或}x\ge 4\\-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3},-2<x<4\end{cases}$，

当 $x\le -2$ 或 $x\ge 4$ 时，$\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}=x+b$，

$\therefore \dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{8}{3}-b=0$，

$\because$ 方程有 2 个不同的解，

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2-4\times\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{8}{3}-b\right)>0$，

解得：$b>-\dfrac{57}{12}$，

当 $-2<x<4$ 时，$-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}=x+b$，

$\therefore -\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}-b=0$，

$\because$ 方程有 2 个不同的解，

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{8}{3}-b\right)>0$，

解得：$b<\dfrac{33}{12}$，

故④错误；

综上，正确的有①③，

故选：C．

【点睛】本题考查了数字的变化规律，绝对值的性质，一元二次方程的判别式，熟练掌握知识点是解题的关键．

4．（2023 春·江苏·八年级期末）已知两个多项式 $A=x^2+x+1$，$B=x^2-x+1$，x 为实数，将 A、B 进行加减乘除运算：

①若 A+B=10，则 $x=2$；

②$|A-B-2|+|A-B+4|=6$，则 x 需要满足的条件是 $-2\le x\le 1$；

③$A\times B=0$，则关于 x 的方程无实数根；

④若 x 为正整数$(x\neq 3)$，且 $\dfrac{A-3}{B-7}$ 为整数，则 $x=1$，2，4，5．

上面说法正确的有（ ）

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个

【答案】C

【分析】利用 $A+B=10$ 可求出 $x=\pm 2$，故①错误；对 $|A-B-2|+|A-B+4|=6$ 分情况讨论可知②正确；若 $A\times B=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$，利用根的判别式可知 $A=0$，$B=0$ 时，方程无解，故③正确 由 $\dfrac{A-3}{B-7}$ 为整数，可得 $\dfrac{2}{x-3}$ 是整数，可求出 $x=1$，2，4，5，故④正确．

【详解】解：$\because A=x^2+x+1$，$B=x^2-x+1$，

$\therefore$①当 $A+B=10$ 时，则 $x^2+x+1+x^2-x+1=10$，解得：$x=\pm 2$，故①错误；

②当 $|A-B-2|+|A-B+4|=6$，则 $|A-B-2|+|A-B+4|=|2x-2|+|2x+4|=6$，

当 $x\le -2$ 时，$|2x-2|+|2x+4|=2-2x-(2x+4)=-4x-2=6$，解得：$x=-2$；

当 $-2<x\le 1$，$|2x-2|+|2x+4|=2-2x+(2x+4)=6$，解得：$-2<x\le 1$；

当 $x>1$，$|2x-2|+|2x+4|=2x-2+(2x+4)=4x+2=6$，解得：$x=1$（舍去）；

综上所述：$-2\le x\le 1$，故②正确；

③若 $A\times B=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$，

当 $A=0$ 时，$x^2+x+1=0$，$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$，无解；

当 $B=0$ 时，$x^2-x+1=0$，$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$，无解；

$\therefore A\times B=0$，关于 x 的方程无实数根；故③正确；

④$\because \dfrac{A-3}{B-7}=\dfrac{x^2+x+1-3}{x^2-x+1-7}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}=\dfrac{x^2-x-6+2x+4}{x^2-x-6}=1+\dfrac{2x+4}{x^2-x-6}=1+\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x-3)}=1+\dfrac{2}{x-3}$，

若 $\dfrac{A-3}{B-7}$ 为整数，则 $\dfrac{2}{x-3}$ 是整数，

∵x 为正整数($x\neq 3$)，解得：$x=1$，2，4，5，故④正确；

∴正确的有②③④

故选：C

【点睛】本题考查分式的化简，含绝对值的一元一次方程的求解，根的判别式，能够正确解方程是解题的关键．

5．(2023·全国·九年级假期作业）关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2ax+b+1=0$ （ab≠0）有两个相等的实数根 k，则下列选项成立的是（　）

A．若 -1＜a＜0，则 $\frac{k}{a}>\frac{k}{b}$ B．若 $\frac{k}{a}>\frac{k}{b}$，则 0＜a＜1

C．若 0＜a＜1，则 $\frac{k}{a}<\frac{k}{b}$ D．若 $\frac{k}{a}<\frac{k}{b}$，则-1＜a＜0

【答案】B

【分析】根据一元二次方程的根的情况利用判别式求得 a 与 b 的数量关系，再代入方程求 k 的值，然后结合 a 的取值范围和分式加减法运算法则计算求解．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2ax+b+1=0$ （$ab\neq 0$）有两个相等的实数根 k，

∴ $\Delta=(-2a)^2-4a(b+1)=0$，

$4a^2-4ab-4a=0$，

又∵$ab\neq 0$，

∴a-b-1=0，即 a=b+1，

∴ax^2-2ax+a=0，

解得：x_1=x_2=1，

∴k=1，

$\frac{k}{a}-\frac{k}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{a(a-1)}$

当 $\frac{k}{a}>\frac{k}{b}$ 时，即 $\frac{k}{a}-\frac{k}{b}>0$，

即 $-\frac{1}{a(a-1)}>0$，

∴a（a-1）<0，

即 $\begin{cases}a<0\\a-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0\\a-1<0\end{cases}$

解得 0<a<1

当$\frac{k}{a}<\frac{k}{b}$时，即$\frac{k}{a}-\frac{k}{b}<0$，

即$-\frac{1}{a(a-1)}<0$，

∴a（a-1）>0，

即$\begin{cases}a>0\\a-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\a-1<0\end{cases}$

解得：a>1 或 a<0．

故选：B．

【点睛】本题考查一元二次方程的根的判别式，根据一元二次方程根的情况求得 a 与 b 之间的等量关系是解题关键．

6．（2023 春·安徽·八年级期中）对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，下列说法：

①若$a-b+c=0$，则$b^2-4ac\geq0$；

②若方程$ax^2+c=0$有两个不相等的实根，则方程$ax^2+bx+c=0$必有两个不相等的实根；

③若c是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根，则一定有$ac+b+1=0$成立；

④若x_0是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根，则$b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$

其中正确的：（　）

A．只有①　B．只有①②　　C．①②③　D．只有①②④

【答案】D

【分析】根据一元二次方程解的含义、一元二次方程根的判别式等知识逐个分析即可．

【详解】由$a-b+c=0$，表明方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有实数根－1，表明一元二次方程

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有实数解，则$\Delta=b^2-4ac\geq0$，故①正确；

∵方程$ax^2+c=0$有两个不相等的实根，

∴方程$x^2=-\frac{c}{a}$有两个不相等的实根，

即 a 与 c 异号．

∴-ac>0，

∴$\Delta=b^2-4ac=b^2+(-4ac)>0$，

∴方程$ax^2+bx+c=0$必有两个不相等的实根；

故②正确；

∵c是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根，

∴$ac^2+bc+c=0$，

即$c(ac+b+1)=0$

当$c\neq 0$时，一定有$ac+b+1=0$成立；

当c=0时，则$ac+b+1=0$不一定成立，例如：方程$3x^2+2x=0$，则$ac+b+1=3\neq 0$；

故③错误；

∵x_0是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根，

∴$ax_0^{\ 2}+bx_0+c=0$，

∴$c=-ax_0^2-bx_0$，

∴$b^2-4ac=b^2-4a(-ax_0^2-bx_0)=4ax_0^2+4ax_0+b^2=(2ax_0+b)^2$，

故④正确；

故选：D．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式、一元二次方程的解等知识，熟练掌握这些知识是解答本题的关键．

7．（2023春·安徽滁州·八年级校联考期中）对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，下列说法：

①若$a+b+c=0$，则$b^2-4ac\geq 0$；

②若方程$ax^2+c=0$有两个不相等的实根，则方程$ax^2+bx+c=0$必有两个不相等的实根；

③若c是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根，则一定有$ac+b+1=0$成立；

④若x_0是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根，则$b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$其中正确的（　）

A．只有①②④　B．只有①②③　C．①②③④　D．只有①②

【答案】A

【分析】根据一元二次方程的根、一元二次方程的根的判别式、等式的性质解决此题．

【详解】①当x=1时，$a\times 1^2+b\times 1+c=a+b+c=0$，那么一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）有两个不相等的实数根或有两个相等的实数根，此时$b^2-4ac\geq 0$成立，那么①一定正确．

②方程$ax^2+c=0$有两个不相等的实根，则$-4ac>0$，那么$b^2-4ac>0$，故方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）必有两个不相等的实根，进而推断出②正确．

③由c是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根，得$ac^2+bc+c=0$．当$c\neq 0$，则$ac+b+1=0$；当$c=0$，则$ac+b+1$不一定等于0，那么③不一定正确．

④$(2ax_0+b)^2=4a2x_02+b2+4abx_0$，由 $b^2-4ac=4a^2x_0^2+b^2+4abx_0$，得 $ax_0^2+bx_0+c=0$．由 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $ax_02+bx_0+c=0$ 成立，那么④正确．

综上：正确的有①②④，共 3 个．

故选：A．

【点睛】本题主要考查一元二次方程的根、一元二次方程的根的判别式、等式的性质，熟练掌握一元二次方程的根、一元二次方程的根的判别式、等式的性质是解决本题的关键．

8．（2023·全国·九年级假期作业）若方程 $x^2+2px-3p-2=0$ 的两个不相等的实数根 x_1、x_2 满足 $x_1^2+x_1^3=4-\left(x_2^2+x_2^3\right)$，则实数 p 的所有值之和为（　）

A．0　　B．$-\frac{3}{4}$　C．-1　　D．$-\frac{5}{4}$

【答案】B

【分析】先根据一元二次方程解的定义和根与系数的关系得到 $x_1^2+2px_1-3p-2=0$，$x_1+x_2=-2p$，进而推出 $x_1^3=3px_1+2x_1-2px_1^2$，则 $x_1^3+x_1^2=3px_1+2x_1-2px_1^2+x_1^2$，$x_2^3+x_2^2=3px_2+2x_2-2px_2^2+x_2^2$，即可推出 $(3p+2)(x_1+x_2)+(1-2p)\left(x_1^2+x_2^2\right)=4$，然后代入 $x_1+x_2=-2p$，$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-4p$ 得到 $2p(4p+3)(p+1)=0$，再根据判别式求出符号题意的值即可得到答案．

【详解】解：∵x_1、x_2 是方程 $x^2+2px-3p-2=0$ 的两个相等的实数根，

∴$x_1^2+2px_1-3p-2=0$，$x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=-3p-2$，

∴$x_1^2+2px_1=3p+2$，

∴$x_1^3+2px_1^2=3px_1+2x_1$，

∴$x_1^3=3px_1+2x_1-2px_1^2$，

∴$x_1^3+x_1^2=3px_1+2x_1-2px_1^2+x_1^2$，

同理得 $x_2^3+x_2^2=3px_2+2x_2-2px_2^2+x_2^2$，

∵$x_1^2+x_1^3=4-\left(x_2^2+x_2^3\right)$，

∴$x_1^2+x_1^3+\left(x_2^2+x_2^3\right)=4$，

∴$3px_1+2x_1-2px_1^2+x_1^2+3px_2+2x_2-2px_2^2+x_2^2=4$，

$\therefore (3p+2)(x_1+x_2)+(1-2p)(x_1^2+x_2^2)=4$，

$\therefore (3p+2)(-2p)+(1-2p)\left[(-2p)^2-2(-3p-2)\right]=4$，

$\therefore -6p^2-4p+(1-2p)(4p^2+6p+4)=4$，

$\therefore -6p^2-4p+4p^2+6p+4-2p(4p^2+6p+4)=4$，

$\therefore -2p^2+2p-2p(4p^2+6p+4)=0$，

$\therefore -2p(4p^2+6p+4+p-1)=0$，

$\therefore 2p(4p^2+7p+3)=0$，

$\therefore 2p(4p+3)(p+1)=0$，

解得 $p_1=0$，$p_2=-1$，$p_3=-\frac{3}{4}$，

$\because \Delta=(2p)^2+4(3p+2)>0$，

$\therefore p^2+3p+2>0$，

$\therefore (p+1)(p+3)>0$，

$\therefore p=-1$ 不符合题意，

$\therefore p_1+p_3=-\frac{3}{4}$

∴符合题意，

故选 B．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，根的判别式，一元二次方程解的定义，熟知一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值是解题的关键．

9．（2023 春·浙江杭州·八年级校考期中）空地上有一段长为 a 米的旧墙 MN，利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园（如图 1 或图 2），已知木栏总长为 40 米，所围成的菜园面积为 S．下列说法错误的是（　　）

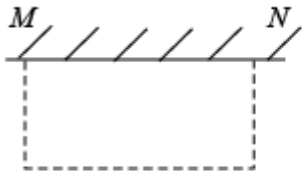


图1

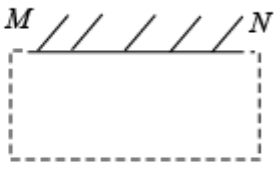


图2

A．若 $a=16$，$S=196$，则有一种围法

B．若$a=20$，$S=198$，则有一种围法

C．若$a=24$，$S=198$，则有两种围法

D．若$a=24$，$S=200$，则有一种围法

【答案】A

【分析】分两种情况讨论：，图 2 围法，设矩形菜园垂直于墙的边为x米，分别表示矩形的长，再利用矩形面积列方程，解方程，注意检验x的范围，从而可得答案．

【详解】解：设矩形菜园的宽为x米，则长为$(40-2x)$米，

$\therefore S=x(40-2x)=-2x^2+40x,$

当$a=16$时，采用图 1 围法，则此时$12\leqslant x<20,$

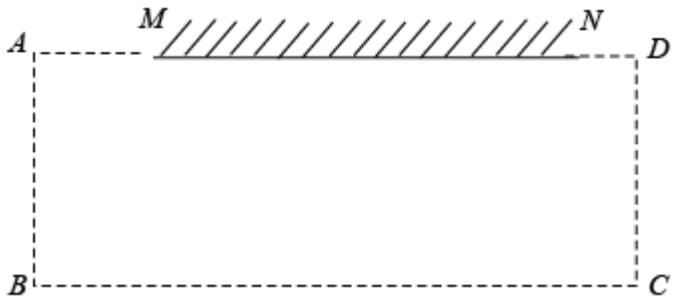
当$S=196$时，

$-2x^2+40x=196,$

解得：$x_1=10+\sqrt{2},x_2=10-\sqrt{2},$

此时都不符合题意，

采用图 2 围法，如图，



此时矩形菜园的宽为x米，即$AB=CD=x,$

则$AD+BC=40-2x+16,$则$BC=28-x,$所以长为$(28-x)$米，

结合$28-x>16$可得$0<x<12,$

$\therefore x(28-x)=196,$

解得：$x_1=x_2=14,$经检验不符合题意，

综上：若$a=16,$$S=196$,，则没有围法，故 A 符合题意；

设矩形菜园的宽为x米，则长为$(40-2x)$米，

$\therefore S=x\left(40-2x\right)=-2x^{2}+40x,$

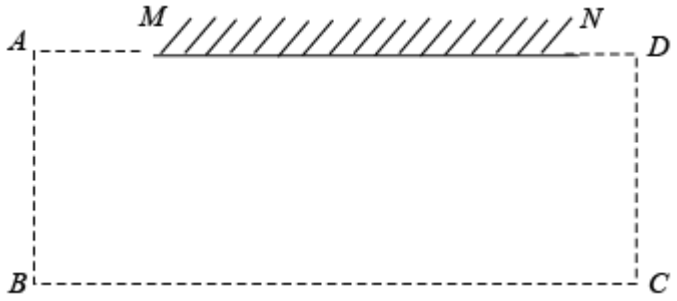
当 $a=20$ 时，采用图 1 围法，则此时 $10\leqslant x<20,$

当 $S=198$ 时，

$-2x^{2}+40x=198,$

解得：$x_{1}=11,x_{2}=9,$ 经检验 $x=11$ 符合题意；

采用图 2 围法，如图，



此时矩形菜园的宽为 x 米，即 $AB=CD=x,$

则 $AD+BC=40-2x+20,$ 则 $BC=30-x,$ 所以长为 $\left(30-x\right)$ 米，

结合 $30-x>20$ 可得 $0<x<10,$

$\therefore x\left(30-x\right)=198,$

解得：$x_{1}=15+3\sqrt{3},x_{2}=15-3\sqrt{3},$ 经检验 $x=15-3\sqrt{3}$ 符合题意，

综上：若 $a=20,$ $S=198$，则有两种围法，故 B 不符合题意；

设矩形菜园的宽为 x 米，则长为 $\left(40-2x\right)$ 米，

$\therefore S=x\left(40-2x\right)=-2x^{2}+40x,$

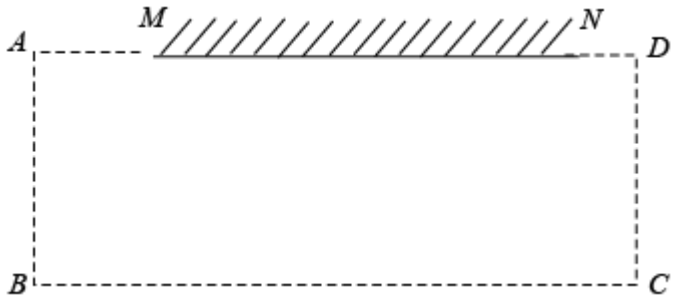
当 $a=20$ 时，采用图 1 围法，则此时 $10\leqslant x<20,$

当 $S=198$ 时，

$-2x^{2}+40x=198,$

解得：$x_{1}=11,x_{2}=9,$ 经检验都符合题意；

采用图 2 围法，如图，



此时矩形菜园的宽为 x 米，即 $AB=CD=x$,

则 $AD+BC=40-2x+24$, 则 $BC=32-x$, 所以长为 $(32-x)$ 米,

结合 $32-x>24$ 可得 $0<x<8$,

$\therefore x(32-x)=198$,

解得: $x_1=16+\sqrt{58}, x_2=16-\sqrt{58}$, 经检验都不符合题意,

若 $a=24$, $S=198$, 则有两种围法, C 不符合题意,

设矩形菜园的宽为 x 米, 则长为 $(40-2x)$ 米,

$\therefore S=x(40-2x)=-2x^2+40x$,

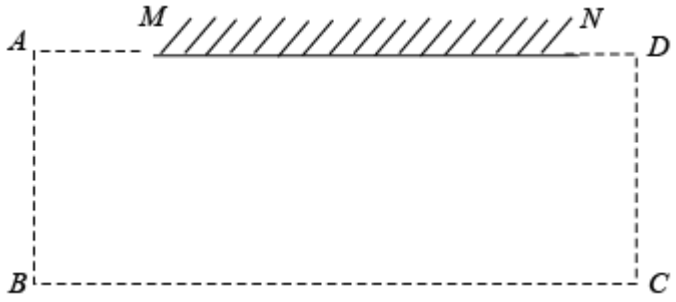
当 $a=20$ 时, 采用图 1 围法, 则此时 $10 £ x < 20$,

当 $S=200$ 时,

$-2x^2+40x=200$,

解得: $x_1=x_2=10$, 经检验符合题意;

采用图 2 围法, 如图,



此时矩形菜园的宽为 x 米，即 $AB=CD=x$,

则 $AD+BC=40-2x+24$, 则 $BC=32-x$, 所以长为 $(32-x)$ 米,

结合 $32-x>24$ 可得 $0<x<8$,

$\therefore x(32-x)=200,$

解得：$x_1=16+2\sqrt{14}, x_2=16-2\sqrt{14}$，经检验都不符合题意，

综上所述，若$a=24$，$S=200$，则有一种围法，D 不符合题意；

故选 A

【点睛】本题考查的是一元二次方程的应用，理解题意，表示图 2 中矩形的长是解本题的关键．

二、填空题

10．（2023·山东枣庄·统考一模）将关于 x 的一元二次方程$x^2-px+q=0$变形为$x^2=px-q$，就可以将x^2表示为关于 x 的一次多项式，从而达到“降次”的目的，又如$x^3=x\cdot x^2=x(px-q)=\ldots$，我们将这种方法称为“降次法”，通过这种方法可以化简次数较高的代数式．根据“降次法”，已知 $x^2+x-1=0$，且$x>0$．则x^4-2x^3+3x的值为_____．

【答案】$6-2\sqrt{5}$

【分析】先将$x^2+x-1=0$变形为$x^2+x=1, x^2=1-x$，再利用“降次法”将x^4-2x^3+3x转化为$4-4x$，然后解一元二次方程，求出x，再代入求值即可．

【详解】解：$x^2+x-1=0$，

$\therefore x^2+x=1, x^2=1-x$．

$\therefore x^4-2x^3+3x$

$=x^4+x^3-3x^3+3x$，

$=x^2(x^2+x)-3x\cdot x^2+3x$，

$=x^2-3x(1-x)+3x$，

$=1-x-3x+3x^2+3x$，

$=1-x-3x+3(1-x)+3x$，

$=1-x-3x+3-3x+3x$，

$=4-4x$．

$\because x^2+x-1=0$，$a=1, b=1, c=-1$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1+4=5>0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\because x>0$，

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

∴原式$=4-4\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$=4-2(-1+\sqrt{5})$

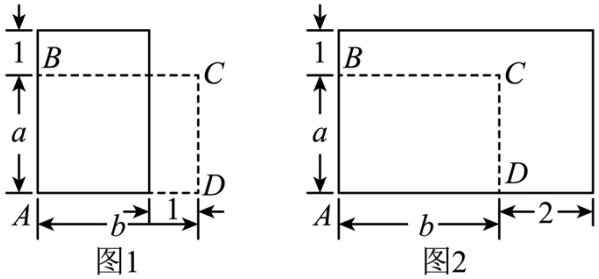
$=4+2-2\sqrt{5}$

$=6-2\sqrt{5}$ ．

故答案为：$6-2\sqrt{5}$ ．

【点睛】本题考查代数式求值和解一元二次方程．理解并掌握“降次法”，是解题的关键．

11．（2023·全国·九年级专题练习）如图是一块矩形菜地$ABCD, AB=a(\mathrm{m}), AD=b(\mathrm{m})$，面积为$s(\mathrm{m}^2)$．现将边$AB$增加$1\mathrm{m}$．



（1）如图1，若$a=5$，边AD减少$1\mathrm{m}$，得到的矩形面积不变，则b的值是　　．

（2）如图2，若边AD增加$2\mathrm{m}$，有且只有一个a的值，使得到的矩形面积为$2s(\mathrm{m}^2)$，则s的值是_____．

【答案】　6　　$6+4\sqrt{2}$ / $4\sqrt{2}+6$

【分析】（1）根据面积的不变性，列式计算即可．

（2）根据面积，建立分式方程，转化为a一元二次方程，判别式为零计算即可．

【详解】（1）根据题意，得，起始长方形的面积为$s=ab(\mathrm{m}^2)$，变化后长方形的面积为$(a+1)(b-1)(\mathrm{m}^2)$，

∵$a=5$，边AD减少$1\mathrm{m}$，得到的矩形面积不变，

∴$(5+1)(b-1)=5b$，

解得$b=6$，

故答案为：6．

（2）根据题意，得，起始长方形的面积为$s=ab(\mathrm{m}^2)$，变化后长方形的面积为$(a+1)(b+2)(\mathrm{m}^2)$，

$\therefore 2s=(a+1)(b+2)$，$b=\dfrac{s}{a}$，

$\therefore 2s=(a+1)\left(\dfrac{s}{a}+2\right)$，

$\therefore \dfrac{2s}{a+1}=\dfrac{s}{a}+2$，

$\therefore 2a^2+(2-s)a+s=0$，

∴有且只有一个a的值，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(2-s)^2-8s=0$，

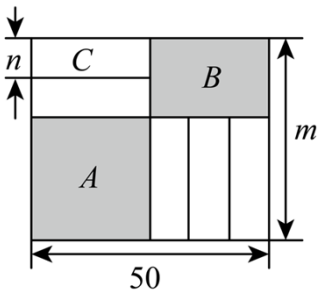
$\therefore s^2-12s+4=0$，

解得$s_1=6+4\sqrt{2}, s_2=6-4\sqrt{2}$（舍去），

故答案为：$6+4\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了图形的面积变化，一元二次方程的应用，正确转化为一元二次方程是解题的关键．

12．（2023·河北衡水·统考二模）六张完全相同的小矩形纸片C与A，B两张矩形纸片恰好能拼成一个相邻边长为m，50的大矩形，部分数据如图所示．



（1）若$n=8$，则矩形A的水平边长为_____；

（2）请用含m，n的代数式表示矩形A的周长：_____；

（3）若矩形A，B的面积相等，则$n=$_____．

【答案】 26 $100+2m-12n$ $\dfrac{25}{3}$

【分析】（1）根据图可得矩形A的长$+3$个小矩形宽$=50$，即可得到矩形A的水平边长；

（2）根据图可得矩形A的宽$+3$个小矩形宽$=m$，进而得到矩形A的竖直边长，即可得到答案；

（3）分别表示出矩形A，B的面积，根据矩形A，B的面积相等即可得到答案．

【详解】解：设矩形A的水平边长为a，矩形A的竖直边长b，

（1）由图可知$a+3n=50$，

$\therefore a=50-3n=50-3\times 8=26$；

（2）由（1）可知$a=50-3n$，

由图可知$b=m-3n$

∴ 矩形A的周长$=2(a+b)=2\left[(50-3n)+(m-3n)\right]$

$=2(50+m-6n)=100+2m-12n$；

（3）由题知，矩形A的面积$=ab=(50-3n)(m-3n)$；

由图知，矩形B的面积$=2n\cdot 3n=6n^2$

∵ 矩形A，B的面积相等，

$(50-3n)(m-3n)=6n^2$①

∵ 小矩形纸片长$=m-2n$，矩形A的水平边长为$a=50-3n$

由图可知小矩形纸片长=矩形A的水平边长

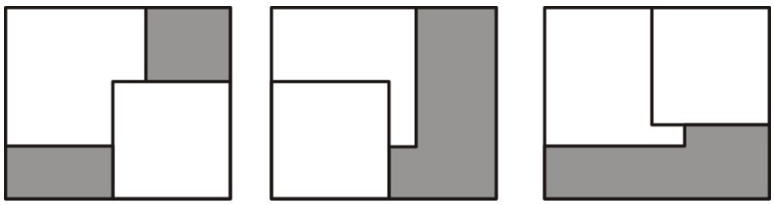
$\therefore m-2n=50-3n$ ②

联立①②解得，$n=\dfrac{25}{3}$（$n=50$舍去）.

故答案为：26；$100+2m-12n$；$\dfrac{25}{3}$.

【点睛】本题主要考查列多项式，多项式的值，一元二次方程，掌握解题的方法以及解方程的方法是解题的关键.

13.（2023春·浙江·八年级阶段练习）一个矩形内放入两个边长分别为3cm和4cm的小正方形纸片，按照图①放置，矩形纸片没有被两个正方形纸片覆盖的部分（黑色阴影部分）的面积为7cm^2；按照图②放置矩形纸片没有被两个正方形纸片覆盖的部分的面积为11cm^2，若把两张正方形纸片按图③放置时，矩形纸片没有被两个正方形纸片覆盖的部分的面积为_____.



【答案】$8cm^2$/8平方厘米

【分析】设矩形的长为x，宽为y，根据图①和图②的阴影面积列出方程组，求出x,y的值，再求图③的面积求解即可.

【详解】解：设矩形的长为x，宽为y，由题意，得：

$\begin{cases}(x-3)(y-4)+(x-4)(y-3)=7\\ xy=16+3(y-4)+11\end{cases}$，

整理，得：$\begin{cases}2xy=7x+7y-17①\\ xy=15+3y②\end{cases}$，

把②代入①得：$y=47-7x$③，

把③代入①得：$2x(47-7x)=7x+7(47-7x)-17$，

整理，得：$7x^2-68x+156=0$，

解得：$x_1=6,x_2=\dfrac{26}{7}$，

当$x=6$时，$y=47-6\times7=5$，

当$x=\dfrac{26}{7}$时，$y=47-\dfrac{26}{7}\times7=21$（不合题意，舍去）；

∴长方形的长为$6\,\text{cm}$，宽为$5\,\text{cm}$，

∴图③中的阴影面积为：$6\times5-16-3\times(6-4)=8\text{cm}^2$；

故答案为：8cm^2．

【点睛】本题考查一元二次方程的应用．正确的识图，找准等量关系，列出方程，是解题的关键．

14．（2023春·浙江·七年级期末）已知在长方形纸片$ABCD$中，$AB=6$，$AD=5$，现将两个边长分别为a和b的正方形纸片按图1、图2两种方式放置（图1、图2中两张正方形纸片中均有部分重叠），长方形中未被这两张正方形纸片覆盖的部分用阴影表示，设图1中阴影部分的面积为S_1，图2中阴影部分的面积为S_2；若$S_2-S_1=3$时，则$b=$_____；若再在边长为a大正方形的左上角摆放一个边长为b的小正方形（如图3），当$S_1=8$时，则图3中阴影部分的面积$S_3=$_____．

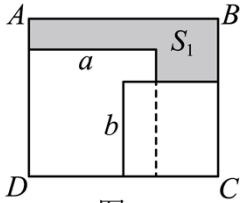


图1

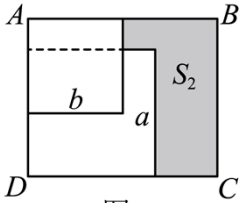


图2

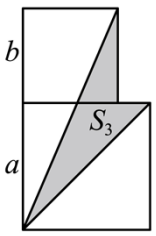


图3

【答案】　3　　6.5/$\dfrac{13}{2}$

【分析】先将S_1，S_2，S_3用用a，b表示，再分别根据$S_2-S_1=3$与$S_1=8$，$S_2=11$计算即可．

【详解】解：在图1中，根据题意得：$S_1=S_{\text{长方形}ABCD}-S_{\text{大正方形}}-S_{\text{小正方形}}+S_{\text{大小正方形重叠部分}}$，

$\therefore S_1=6\times5-a^2-b^2+(a+b-6)b=-a^2+ab-6b+30$，

同理在图 2 中，$S_2=S_{长方形ABCD}-S_{大正方形}-S_{小正方形}+S_{大小正方形重叠部分}$，

$\therefore S_2=6\times5-a^2-b^2+(a+b-5)b=-a^2+ab-5b+30$

$\therefore S_2-S_1=(-a^2+ab-5b+30)-(-a^2+ab-6b+30)=b$，

又$\because S_2-S_1=3$，

$\therefore b=3$．

又$\because S_1=8$，即$-a^2+ab-6b+30=8$，

将$b=3$代入方程$-a^2+ab-6b+30=8$中得：

$-a^2+3a-6\times3+30=8$

解得：$a_1=4,a_2=-1$（舍去），

$\therefore a=4$．

在图 3 中，$S_3=S_{大正方形}+S_{小正方形}-S_{左上空白大直角三角形}-S_{右下空白小直角三角形}$

$\therefore S_3=a^2+b^2-\frac{1}{2}(a+b)b-\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times4^2+\frac{1}{2}\times3^2-\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{13}{2}$

故答案为：3；$\frac{13}{2}$．

【点睛】本题考查列代数式，整式的混合运算，解一元二次方程，掌握相关知识和技巧是解题的关键．本题难度较大，所列式子较复杂，需要较强的阅读理解能力和对数学思想的运用能力．

三、解答题

15．（2023 春·福建福州·八年级福州日升中学校考期末）阅读材料．材料：若一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

(1)材料理解：一元二次方程$5x^2+10x-1=0$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2=$　，$x_1x_2=$　．

(2)类比探究：已知实数m，n满足$7m^2-7m-1=0$，$7n^2-7n-1=0$，且$m\neq n$，求m^2n+mn^2的值．

(3)思维拓展：已知实数s，t分别满足$7s^2+7s+1=0$，$t^2+7t+7=0$，且$st\neq1$，求$\frac{2st+7s+2}{t}$的值．

【答案】(1)-2；$-\frac{1}{5}$

(2)$-\frac{1}{7}$

(3)-1

【分析】（1）直接根据阅读材料可得答案；

（2）由题意得出m，n可看作方程$7x^2-7x-1=0$的两个根，据此知$m+n=1$，$mn=-\frac{1}{7}$，将其代入计算可得；

（3）把$t^2+7t+7=0$变形为$7\left(\frac{1}{t}\right)^2+7\cdot\frac{1}{t}+1=0$，据此可得实数$s$和$\frac{1}{t}$可看作方程$7x^2+7x+1=0$的两根，继而知$s+\frac{1}{t}=-1$，$s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{7}$，进一步代入计算可得．

【详解】（1）解：$x_1+x_2=-\frac{10}{5}=-2$，$x_1x_2=-\frac{1}{5}$，

故答案为：-2；$-\frac{1}{5}$；

（2）$\because 7m^2-7m-1=0$，$7n^2-7n-1=0$，且$m\neq n$，

$\therefore m$，n可看作方程$7x^2-7x-1=0$的两个根，

$\therefore m+n=1$，$mn=-\frac{1}{7}$，

$\therefore m^2n+mn^2=mn(m+n)=1\times\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}$，

$\therefore m^2n+mn^2$的值为$-\frac{1}{7}$；

（3）$\because s$，t分别满足$7s^2+7s+1=0$，$t^2+7t+7=0$，且$st\neq 1$，

$\therefore 7\left(\frac{1}{t}\right)^2+7\cdot\frac{1}{t}+1=0$，

$\therefore s$和$\frac{1}{t}$可看作方程$7x^2+7x+1=0$的两根，

$\therefore s+\frac{1}{t}=-1$，$s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{7}$，

$\therefore\frac{2st+7s+2}{t}$

$=2s+\frac{7s}{t}+\frac{2}{t}$

$=2\left(s+\frac{1}{t}\right)+7\cdot s\cdot\frac{1}{t}$

$=2\times(-1)+7\times\frac{1}{7}$

$=-1$，

$\therefore\frac{2st+7s+2}{t}$的值为$-1$．

【点睛】本题考查分式的化简求值，因式分解的应用，求代数式的值，解题的关键是根据题意建立合适的方程及分式的混合运算顺序和运算法则．

16．（2023 春·湖南长沙·八年级统考期末）请阅读下列材料：

问题：已知方程$x^2+x-1=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的 2 倍．

解：设所求方程的根为y，则$y=2x$，所以$x=\frac{y}{2}$，把$x=\frac{y}{2}$代入已知方程，得$\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y}{2}-1=0$；化简，得$y^2+2y-4=0$；故所求方程为$y^2+2y-4=0$．

这种利用方程根的代换求新方程的方法，我们称为“换根法”；

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程（要求：把所求方程化为一般形式）：

(1)已知方程$x^2+3x-2=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别为已知方程根的相反数；

(2)已知关于x的一元二次方程$ax^2-bx+c=0(a\neq0)$有两个不等于零的实数根，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的倒数．

【答案】(1)$y^2-3y-2=0$

(2)$cy^2-by+a=0(c\neq0)$

【分析】（1）设所求方程的根为y，则$y=-x$，将$x=-y$代入已知方程$x^2+3x-2=0$，化简即可得到答案；

（2）设所求方程的根为y，则$y=\frac{1}{x}$，将其代入已知方程，然后化为一般形式即可得到答案．

【详解】（1）解：设所求方程的根为y，则$y=-x$，

$\therefore x=-y$，

把$x=-y$代入已知方程$x^2+3x-2=0$，

得$(-y)^2+3\times(-y)-2=0$，

化简得，$y^2-3y-2=0$，

$\therefore$这个一元二次方程为：$y^2-3y-2=0$；

（2）解：设所求方程的根为y，则$y=\frac{1}{x}$，

$\therefore x=\frac{1}{y}$，

把$x=\frac{1}{y}$代入已知方程$ax^2-bx+c=0(a\neq0)$，

得 $a\left(\frac{1}{y}\right)^2-b\cdot\frac{1}{y}+c=0$，

去分母得，$a-by+cy^2=0$，

若 $c=0$，则 $ax^2-bx=0$，于是方程 $ax^2-bx+c=0(a\neq0)$ 有一根为 0，不符合题意，

$\therefore c\neq0$，

$\therefore$ 所求方程为：$cy^2-by+a=0(c\neq0)$．

【点睛】本题考查了一元二次方程的解，解答该题的关键是弄清楚“换根法”的具体解题方法．

17．（2023 春·广东梅州·九年级校考开学考试）已知关于 x 的方程 $7x^3-7(p+2)x^2+(44p-1)x+2=60p$．

① 求证 不论 p 为何实数时，方程 $7x^3-7(p+2)x^2+(44p-1)x+2=60p$ 有固定的自然数解，并求这自然数

② 设方程另外的两个根为 u、v，求 u、v 的关系式；

③ 若方程 $7x^3-7(p+2)x^2+(44p-1)x+2=60p$ 的三个根均为自然数，求 p 的值．

【答案】① 证明见解析，所求自然数为 2；② $uv=\frac{30(u+v)-1}{7}$；③ $p=18$．

【分析】① 把方程整理，使含 P 的项“系数”为 0，求 x 的值，再代入不含 p 的项检验，可求这个自然数；

② 由所求自然数值可知方程的一个因式，代入方程，再将方程分解因式，由两根关系解题；

③ 在(2)的条件下，根据解为自然数，求 p 的值．

【详解】① 原方程整理得：$(7x^3-14x^2-x+2)-(7x^2-44x+60)p=0$，

解方程 $7x^2-44x+60=0$，得 $x_1=2$，$x_2=\frac{30}{7}$，

当 $x=2$ 时，$7x^3-14x^2-x+2=0$，故所求自然数为 2；

② $\because x=2$ 是方程的固定解，

$\therefore(x-2)$ 是方程的一个因式，原方程分解为：

$(x-2)(7x^2-7px+30p-1)=0$，

$\therefore u$、v 是方程 $7x^2-7px+30p-1=0$ 的两根，

$\therefore u+v=p$，$uv=\frac{30p-1}{7}$，

$\therefore uv=\frac{30(u+v)-1}{7}$；

③ 由② 可知，$u+v=p$，$uv=\frac{30p-1}{7}$，

设$\frac{30p-1}{7}=k$，则$p=\frac{7k+1}{30}$，

由题意可知，p，k，u，v均为自然数，

则k的个位数字必须为7，

∴当$k=77$时，即$p=18$时，方程三个根均为自然数．

【点睛】本题考查了求高次方程固定根的方法，方程的根与系数关系，自然数解的问题，解题的关键是对高次方程进行降次及熟练掌握根与系数之间的关系．

18．（2023·全国·九年级专题练习）阅读材料：选取二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq 0)$中的两项，配成完全平方式的过程叫配方．例如

①选取二次项和一次项配方：$x^2-4x+2=(x-2)^2-2$；

②选取二次项和常数项配方：$x^2-4x+2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-4\right)x$，或$x^2-4x+2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2-\left(4+2\sqrt{2}\right)x$

③选取一次项和常数项配方：$x^2-4x+2=\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2-x^2$

请根据阅读材料解决下列问题：

(1)比照上面的例子，写出x^2-4x+9三种不同形式的配方；

(2)已知$x^2+y^2+4x-6y+13=0$，求$(-y)x$的值

(3)当x，y为何值时，代数式$5x^2-4xy+y^2+6x+25$取得最小值，最小值为多少？

【答案】(1)见解析

(2)$(-y)x=6$

(3)当$x=-3$，$y=-6$时，$5x^2-4xy+y^2+6x+25$取得最小值，最小值为16

【分析】（1）根据配方的定义，分别选取二次项、一次项、常数项中的两项，进行配方即可得出三种形式；

（2）首先根据配方法把$x^2+y^2+4x-6y+13=0$变形为$(x+2)^2+(y-3)^2=0$，再根据偶次方的非负性，得出$x+2=0$，$y-3=0$，解出x、y的值，然后将x、y的值代入代数式$(-y)x$，计算即可得出结果；

（3）首先根据配方法把代数式$5x^2-4xy+y^2+6x+25$变形为$(2x-y)^2+(x+3)^2+16$，再根据偶次方的非负性，得出$(2x-y)^2+(x+3)^2+16\geq 16$，进而得出当$2x-y=0$，$x+3=0$时，$5x^2-4xy+y^2+6x+25$取得最小值，再进行计算即可得出结果．

【详解】（1）解：第一种形式：选取二次项和一次项配方，

x^2-4x+9

$=x^2-4x+4-4+9$

$=(x-2)^2+5$；

第二种形式：选取二次项和常数项配方，

x^2-4x+9

$=x^2+6x+9-6x-4x$

$=(x+3)^2-10x$；

或 x^2-4x+9

$=x^2-6x+9+6x-4x$

$=(x-3)^2+2x$；

第三种形式：选取一次项和常数项配方，

x^2-4x+9

$=\frac{4}{9}x^2-4x+9-\frac{4}{9}x^2+x^2$

$=\left(\frac{2}{3}x-3\right)^2+\frac{5}{9}x^2$；

（2）解：$x^2+y^2+4x-6y+13=0$，

配方，得：$x^2+4x+4+y^2-6y+9-4-9+13=0$，

即 $(x+2)^2+(y-3)^2=0$，

$\because (x+2)^2\geq 0$，$(y-3)^2\geq 0$，

$\therefore x+2=0$，$y-3=0$，

解得：$x=-2$，$y=3$，

$\therefore (-y)x=(-3)\times(-2)=6$；

（3）解：$5x^2-4xy+y^2+6x+25$

$=4x^2-4xy+y^2+x^2+6x+9+16$

$=(2x-y)^2+(x+3)^2+16$，

$\because (2x-y)^2+(x+3)^2\geq 0$，

$\therefore (2x-y)^2+(x+3)^2+16\geq 16$，

当 $2x-y=0$，$x+3=0$ 时，$5x^2-4xy+y^2+6x+25$ 取得最小值，

即当 $x=-3$，$y=-6$ 时，$5x^2-4xy+y^2+6x+25$ 取得最小值，最小值为 16．

【点睛】本题考查了配方法的应用，根据配方法的步骤和完全平方公式进行配方是解本题的关键．

19．（2023 春·浙江·八年级专题练习）阅读如下材料，完成下列问题：

材料一：对于二次三项式求最值问题，有如下示例：

$x^2-2x+3=x^2-2x+1^2-1^2+3=(x-1)^2+2$．因为 $(x-1)^2\geq 0$，所以 $(x-1)^2+2\geq 2$，所以，当 $x=1$ 时，原式的最小值为 2．

材料二：对于实数 a，b，若 $a>b>0$，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$．

完成问题：

（1）求 x^2-4x-1 的最小值；

（2）求 $\frac{2x^2-8x+13}{x^2-4x+6}$ 的最大值；

（3）若实数 m，n 满足 $m^2-n^2-6m+12n=27$．求 $\sqrt{n^2-3m^2}$ 的最大值．

【答案】（1）-5；（2）$\frac{5}{2}$（3）$\frac{9\sqrt{6}}{2}$

【分析】（1）按照材料一配方即可求最值；

（2）把原式化成 $2+\frac{1}{x^2-4x+6}$，求 x^2-4x+6 最小值即可；

（3）根据已知得到 $(m-3)^2=(n-6)^2$，即 $m+3=n$ 或 $n=9-m$，代入求最值即可．

【详解】解：（1）$x^2-4x-1=x^2-4x+2^2-2^2-1=(x-2)^2-5$，因为 $(x-2)^2\geq 0$，所以 $(x-2)^2-5\geq -5$，所以，当 $x=2$ 时，原式的最小值为-5．

（2）$\frac{2x^2-8x+13}{x^2-4x+6}=\frac{2(x^2-4x+6)+1}{x^2-4x+6}=2+\frac{1}{x^2-4x+6}$，

当 x^2-4x+6 取最小值时，原式最大，

由（1）可知 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2$，最小值为 2，

此时 $\frac{2x^2-8x+13}{x^2-4x+6}$ 的最大值为 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$；

（3）$\because m^2-n^2-6m+12n=27$，

$\therefore m^2-6m+9-(n^2-12n+36)=0$，

$(m-3)^2=(n-6)^2$，

$m-3=n-6$ 或 $m-3=-n+6$，

$m+3=n$ 或 $n=9-m$，

$n^2-3m^2=(m+3)^2-3m^2=-2m^2+6m+9=-2(m-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{2}$，

最大值是 $\frac{27}{2}$，$\sqrt{n^2-3m^2}$ 的最大值为 $\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$；

或 $n^2-3m^2=(9-m)^2-3m^2=-2m^2-18m+81=-2(m+\frac{9}{2})^2+\frac{243}{2}$，

最大值是 $\frac{243}{2}$，$\sqrt{n^2-3m^2}$ 的最大值为 $\sqrt{\frac{243}{2}}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$；

综上，$\sqrt{n^2-3m^2}$ 的最大值为 $\frac{9\sqrt{6}}{2}$

【点睛】本题考查了配方法求最值，解题关键是熟练运用配方法求代数式的最值．

20．（2023·全国·九年级假期作业）对任意一个三位数 k，如果满足各个数位上的数字都不为零，且十位上的数字等于百位上的数字与个位上的数字的平均数，那么称这个数为“快乐数”．例如：$k=123$，因为 $2=\frac{1+3}{2}$，所以 123 是“快乐数”．

(1)请通过计算判断 241 是不是“快乐数”，并直接写出最大的“快乐数”；

(2)已知一个“快乐数” $k=100a+10b+c$（$1\le a$、b、$c\le 9$，a、b、c 为自然数），且使关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个相等的实数根，若 $7\le a+b+c\le 10$，求满足条件的所有 k 的值．

【答案】(1) 241 不是“快乐数”；最大的“快乐数”为 999

(2) 333

【分析】（1）根据“快乐数”的定义解答即可；

（2）根据“快乐数”可得出 $b=\frac{a+c}{2}$，根据一元二次方程根的情况可得 $b^2=ac$，再结合 $7\le a+b+c\le 10$ 及 $1\le a$、b、$c\le 9$，a、b、c 为自然数可得出 a、b、c 的值，最后结合“快乐数”的定义即可得出答案．

【详解】（1）解：$\because \frac{2+1}{2}\ne 4$，

$\therefore 241$ 不是“快乐数”，

$\because$各个数位上的数字都不为零，且十位上的数字等于百位上的数字与个位上的数字的平均数，各个数位上的数字最大为 9，

又∵$\frac{9+9}{2}=9$，

∴最大的“快乐数”为999．

（2）∵$k=100a+10b+c$为“快乐数”，

∴$b=\frac{a+c}{2}$，

∵关于x的一元二次方程$ax^2+2bx+c=0$有两个相等的实数根，

∴$(2b)^2-4ac=0$，即$b^2=ac$，

∴$\begin{cases}b=\frac{a+c}{2}\\ b^2=ac\\ 7\le a+b+c\le 10\\ 1\le a、b、c\le 9\end{cases}$，

解得：$a=3$，$b=3$，$c=3$，

∴$k=100a+10b+c=100\times3+10\times3+3=333$，

综上所述，满足条件的所有k的值为333．

∴满足条件的所有k的值为333．

【点睛】本题考查一元二次方程的应用，不等式组应用．解题的关键是理解“快乐数”的定义．

21．（2023春·浙江·八年级专题练习）对于任意一个三位数k，如果k满足各个数位上的数字都不为零，且十位上的数字的平方等于百位上的数字与个位上的数字之积的4倍，那么称这个数为“喜鹊数”．例如：k=169，因为$62=4\times1\times9$，所以169是“喜鹊数”．

(1)已知一个“喜鹊数”$k=100a+10b+c$（$1\le a、b、c\le9$，其中a，b，c为正整数），请直接写出a，b，c所满足的关系式　；判断241　“喜鹊数”（填“是”或“不是”），并写出一个“喜鹊数”；

(2)利用（1）中“喜鹊数”k中的a，b，c构造两个一元二次方程$ax^2+bx+c=0$①与$cx^2+bx+a=0$②，若$x=m$是方程①的一个根，$x=n$是方程②的一个根，求m与n满足的关系式；

(3)在（2）中条件下，且$m+n=-2$，请直接写出满足条件的所有k的值．

【答案】(1)$b^2-4ac=0$；不是；121

(2)$mn=1$

(3)121，242，363，484

【分析】（1）根据喜鹊数的定义解答即可；

（2）根据一元二次方程的定义和根的判别式解答即可；

（3）求出 m 与 n 互为倒数，又 $m+n=-2$，得出 $m=-1$，$n=-1$，求出 $b=a+c$，$a=c$，结合喜鹊数的定义即可得出答案．

【详解】（1）∵$k=100a+10b+c$ 是喜鹊数，

∴$b^2=4ac$，即 $b^2-4ac=0$；

∵$4^2=16$，$4\times2\times1=8$，$16\neq8$，

∴241 不是喜鹊数；

∵各个数位上的数字都不为零，百位上的数字与个位上的数字之积的 4 倍，

∴十位上的数字的平方最小为 4，

∵$2^2=4$，$4\times1\times1=4$，

∴最小的“喜鹊数”是 121．

故答案为：$b^2-4ac=0$；不是；121．

（2）∵$x=m$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，$x=n$ 是一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的一个根，

∴$am^2+bm+c=0$，$cn^2+bn+a=0$，

将 $cn^2+bn+a=0$ 两边同除以 n^2 得：$a(\frac{1}{n})^2+b(\frac{1}{n})+c=0$，

∴将 m、$\frac{1}{n}$ 看成是方程 ax^2+bx+c 的两个根，

∵$b^2-4ac=0$，

∴方程 ax^2+bx+c 有两个相等的实数根，

∴$m=\frac{1}{n}$，即 $mn=1$；

故答案为：$mn=1$．

（3）∵$m+n=-2$，$mn=1$，

∴$m=-1$，$n=-1$，

∴$a-b+c=0$，

∴$b=a+c$，

∵$b^2=4ac$，

∴$(a+c)^2=4ac$，

解得：$a=c$，

∴满足条件的所有 k 的值为 121，242，363，484．

故答案为：121，242，363，484．

【点睛】此题考查了一元二次方程的应用，解题关键是弄清喜鹊数的定义．

22．（2023·江苏·九年级假期作业）已知关于 x 的方程$\left|x^2+2px-3p^2+5\right|-q=0$，其中 p，q 都是实数．

(1)若$q=0$时，方程有两个不同的实数根x_1，x_2，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{7}$，求实数 p 的值．

(2)若方程有三个不同的实数根x_1，x_2，x_3，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$，求实数 p 和 q 的值．

(3)是否同时存在质数 p 和整数 q 使得方程有四个不同的实数根x_1，x_2，x_3，x_4且

$x_1x_2x_3x_4=3(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})^4$？若存在，求出所有满足条件的 p，q．若不存在，说明理由．

【答案】(1)$p=5$

(2)$p=-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$，$q=3$

(3)存在，$p=2$时，$q=1$；当$p=5$时，$q=55$

【分析】（1）根据根与系数的关系可得$\Delta=(2p)^2-4(-3p^2+5)=16p^2-20>0$，$x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=5-3p^2$，代入$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{7}$可得关于$p$的方程，解方程即可；

（2）由方程有三个不同的实数根x_1、x_2、x_3，可得$x_3=-p$，x_1、x_2是方程$x^2+2px-3p^2+5=q$的两根；由根与系数的关系可得$x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=10-7p^2$，$x_3=-p$．$\Delta=(2p)^2-4(-7p^2+10)=32p^2-40>0$，进而得到关于$p$的方程，解出$p$即可求出$q$的值；

（3）方程有四个不同的实数根x_1，x_2，x_3，x_4，由（2）知$0<q<4p^2-5$，不妨设x_1，x_2是方程$x^2+2px-3p^2+5-q=0$的两根，x_3，x_4是方程$x^2+2px-3p^2+5+q=0$的两根，可得$3p^4=3p^4\times1=p^4\times2=3p^3\times p=p^3\times3p=3p^2\times p^2$，进行讨论即可求解．

【详解】（1）解：若$q=0$，则方程为$x^2+2px-3p^2+5=0$．

因该方程有两个不同的实数x_1、x_2，

可得$\Delta=(2p)^2-4(-3p^2+5)=16p^2-20>0$，$x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=5-3p^2$，

解得$p^2>\frac{5}{4}$；

由$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{7}$，得$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-2p}{5-3p^2}=\frac{1}{7}$，

解得$p=5$或$-\frac{1}{3}$．（注意$5-3p^2\neq0$）

因为 $p^2>\frac{5}{4}$，所以 $p=5$ ．

（2）显然 $q>0$ ．方程可写成 $x^2+2px-3p^2+5=\pm q$ ．

因该方程有三个不同的实数根，

即函数 $y_1=x^2+2px-3p^2+5$ 与 $y_2=\pm q$ 的图象有三个不同的交点，

可得：$x_3=-p$，$-q=\frac{4(5-3p^2)-4p^2}{4}=5-4p^2$，即 $q=4p^2-5$，

因为 x_1、x_2 是方程 $x^2+2px-3p^2+5=q$ 的两根，

即 $x^2+2px-7p^2+10=0$ ．

则 $x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=10-7p^2$，$x_3=-p$ ．

$\Delta=(2p)^2-4(-7p^2+10)=32p^2-40>0$，

解得 $p^2>\frac{5}{4}$ ．

由 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$，得 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{-2p}{10-7p^2}+\frac{1}{-p}=\frac{10-5p^2}{(7p^2-10)p}=0$，

解得 $p^2=2>\frac{5}{4}$，

$\therefore p=-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$，$q=4p^2-5=3$ ．

（3）存在．

方程有四个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，x_4，由（2）知 $0<q<4p^2-5$，

不妨设 x_1，x_2 是方程 $x^2+2px-3p^2+5-q=0$ 的两根，x_3，x_4 是方程 $x^2+2px-3p^2+5+q=0$ 的两根，

则 $x_1+x_2=-2p$，$x_1x_2=-3p^2+5-q$，$x_3+x_4=-2p$，$x_3x_4=-3p^2+5+q$，

则 $x_1+x_2+x_3+x_4=-4p$，$x_1x_2x_3x_4=(-3p^2+5-q)(-3p^2+5+q)=(3p^2-5+q)(3p^2-5-q)$，

因为 $x_1x_2x_3x_4=3(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})^4$，

所以 $(3p^2-5+q)(3p^2-5-q)=3p^4$，

因为 P 是质数，$p\geq 2$，$3p^2-5+q>3p^2-5-q>0$，

所以 $3p^2-5+q>\sqrt{3}p^2>p^2$，

$3p^4=3p^4\times 1=p^4\times 2=3p^3\times p=p^3\times 3p=3p^2\times p^2$，

则 $\begin{cases}3p^2-5+q=3q^4\\3p^2-5-q=1\end{cases}$，

则$3p^4-6p^2+11=0$无解，

则$\begin{cases}3p^2-5+q=p^4\\3p^2-5-q=3\end{cases}$，

则$3p^4-6p^2+13=0$无解，

则$\begin{cases}3p^2-5+q=3p^3\\3p^2-5-q=p\end{cases}$，

则$3p^3-6p^2+p+10=0$，

解得$p=-1$，

则$\begin{cases}3p^2-5+q=p^3\\3p^2-5-q=3p\end{cases}$，

则$p^3-6p^2+3p+10=0$，

解得$p=-1$，2，5，

则$\begin{cases}3p^2-5+q=3p^2\\3p^2-5-q=p^2\end{cases}$，

则$2p^2-10=0$，

解得$p=\pm\sqrt{5}$．

故$p=2$，5，

所以存在满足条件的p，q．当$p=2$时，$q=1$；当$p=5$时，$q=55$．

【点睛】本题考查了一元二次方程的整数根与有理根，根与系数的关系，牢记两根之和等于$-\frac{b}{a}$、两根之积等于$\frac{c}{a}$是解题的关键．

23．（2023·全国·九年级假期作业）阅读材料，解答问题：

【材料1】

为了解方程$\left(x^2\right)^2-13x^2+36=0$，如果我们把$x^2$看作一个整体，然后设$y=x^2$，则原方程可化为$y^2-13y+36=0$，经过运算，原方程的解为$x_{1,2}=\pm2$，$x_{3,4}=\pm3$．我们把以上这种解决问题的方法通常叫做换元法．

【材料2】

已知实数m，n满足$m^2-m-1=0$，$n^2-n-1=0$，且$m\neq n$，显然m，n是方程$x^2-x-1=0$的两个不相等

的实数根，由韦达定理可知$m+n=1$，$mn=-1$．

根据上述材料，解决以下问题：

(1)直接应用：

方程$x^4-5x^2+6=0$的解为＿＿；

(2)间接应用：

已知实数a，b满足：$2a^4-7a^2+1=0$，$2b^4-7b^2+1=0$且$a\neq b$，求a^4+b^4的值．

【答案】(1)$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$

(2)$\frac{45-7\sqrt{41}}{4}$或$\frac{45+7\sqrt{41}}{4}$或$\frac{45}{4}$

【分析】（1）利用换元法解方程，设$y=x^2$，则原方程可化为$y^2-5y+6=0$，解关于y的方程得到$y_1=2$，$y_2=3$，则$x^2=2$或$x^2=3$，然后分别解两个元二次方程即可；

（2）根据已知条件，当$a=-b$时，$a^2=b^2$，解关于a^2的一元二次方程$2a^4-7a^2+1=0$得$a^2=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$，则$a^4+b^4=2a^4=7a^2-1=\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$；

当$a\neq-b$时，把a^2、b^2看作方程$2x^2-7x+1=0$的两不相等的实数根，则根据根与系数的关系得到$a^2+b^2=\frac{7}{2}$，$a^2b^2=\frac{1}{2}$，再变形得到$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2$，然后利用整体代入的方法计算．

【详解】（1）解：$x^4-5x^2+6=0$，

设$y=x^2$，则原方程可化为$y^2-5y+6=0$，

解得：$y_1=2$，$y_2=3$，

当$y=2$时，$x^2=2$，解得：$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，

当$y=3$时，$x^2=3$，解得：$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$，

∴原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$，

故答案为：$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$；

（2）解：∵实数a，b满足：$2a^4-7a^2+1=0$，$2b^4-7b^2+1=0$且$a\neq b$，

当$a=-b$时，$a^2=b^2$，解关于a^2的一元二次方程$2a^4-7a^2+1=0$，

得：$a^2=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$，

$\therefore a^4+b^4=2a^4=7a^2-1=\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$；

当$a\neq -b$时，则a^2、b^2是方程$2x^2-7x+1=0$的两不相等的实数根，

$\therefore a^2+b^2=\frac{7}{2}$，$a^2b^2=\frac{1}{2}$，

$\therefore a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{45}{4}$；

$\therefore a^4+b^4$的值为$\frac{45-7\sqrt{41}}{4}$或$\frac{45+7\sqrt{41}}{4}$或$\frac{45}{4}$．

【点睛】本题考查一元二次方程根与系数的关系：若x_1，x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$；也考查了换元法，解一元二次方程，求代数式的值，运用了恒等变换的思想．掌握查一元二次方程根与系数的关系是解题的关键．

24．（2023 春·广东深圳·七年级统考期末）在学习《完全平方公式》时，某数学学习小组发现：已知$a+b=5$，$ab=3$，可以在不求a、b的值的情况下，求出a^2+b^2的值．具体做法如下：

$a^2+b^2=a^2+b^2+2ab-2ab=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times3=19$．

(1)若$a+b=7,ab=6$，则$a^2+b^2=$_____；

(2)若m满足$(8-m)(m-3)=3$，求$(8-m)^2+(m-3)^2$的值，同样可以应用上述方法解决问题．具体操作如下：

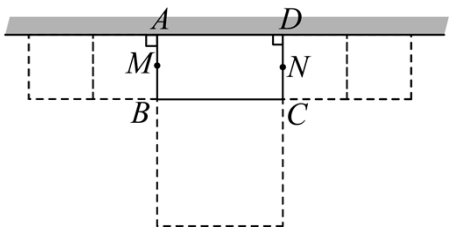
解：设$8-m=a$，$m-3=b$，

则$a+b=(8-m)+(m-3)=5$，$ab=(8-m)(m-3)=3$，

所以$(8-m)^2+(m-3)^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times3=19$．

请参照上述方法解决下列问题：若$(3x-2)(10-3x)=6$，求$(3x-2)^2+(10-3x)^2$的值；

(3)如图，某校“园艺”社团在三面靠墙的空地上，用长 12 米的篱笆（不含墙AM，AD，DN）围成一个长方形花圃 ABCD，花圃 ABCD 的面积为 20 平方米，其中墙 AD 足够长，墙$AM\perp$墙 AD，墙$DN\perp$墙 AD，$AM=DN=1$米．随着学校“园艺”社团成员的增加，学校在花圃$ABCD$旁分别以AB，CD边向外各扩建两个正方形花圃，以BC边向外扩建一个正方形花圃（如图所示虚线区域部分），请问新扩建花圃的总面积为_____平方米．



【答案】(1)37

(2)52

(3)116

【分析】（1）根据材料介绍方法解答即可；

（2）仿照操作方法解答即可；

（3）先说明$BM=CN$，设$BM=CN=x$米，则$BC=(12-2x)$米，然后根据“花圃$ABCD$的面积为20平方米”列方程求得x，然后再列式求得扩建花圃的面积即可．

【详解】（1）解：$a^2+b^2=a^2+b^2+2ab-2ab=(a+b)^2-2ab=7^2-2\times6=37$．

（2）解：设$3x-2=a$，$10-3x=b$，

则$a+b=(3x-2)+(10-3x)=8$，$ab=(3x-2)(10-3x)=6$，

所以$(3x-2)^2+(10-3x)^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times6=52$．

（3）解：∵四边形$ABCD$长方形，

∴$AB=CD$，

∵$AM=DN$，

∴$BM=CN$，

设$BM=CN=x$米，则$BC=(12-2x)$米

由题意知$(x+1)(12-2x)=20$，解得$x=1$或$x=4$，经检验，均符合题意

①当$x=1$时，$AB=2,BC=10$

∴新扩建花圃的总面积为：$2^2\times4+10^2=116$(平方米)；

②当$x=4$时，$AB=5,BC=4$，

新扩建花圃的总面积为：$5^2\times4+4^2=116$(平方米)．

综上，新扩建花圃的总面积为116平方米．

故答案为116．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/656054223150010151