

§5 初等矩阵

一、初等矩阵的概念和简朴性质

二、矩阵的等价

称为第一类初等矩阵（又称换法矩阵）。

2、用非零数 c 乘 E 的第 i 行，得到初等矩阵

$$p(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} (i)$$

称为第二类初等矩阵（又称倍法矩阵）。

注 倍法矩阵的特点是： (i, i) 元 $=c$ ；其他元素与单位矩阵相同。

一样能够得到与列变换相对应的初等矩阵，这些工作

留给学生.我们指出，对单位矩阵作一次列初等变换所到

的初等矩阵也涉及在上面三类初等矩阵中.所以换法、倍

法、消法初等矩阵是全部初等矩阵.

因为初等变换不变化矩阵的秩，从而把可逆矩阵 E 成可逆矩阵，所以初等矩阵是可逆矩阵.直接验证可得:

命题5.1 初等矩阵皆可逆，其逆矩阵是同类型的初等矩阵，且

$$p(i, j)^{-1} = p(i, j), p(i(c))^{-1} = p(i(\frac{1}{c})), p(i, j(k))^{-1} = p(i, j(-k)).$$

这里 $c \neq 0$

轻易验证

命题5.2 初等矩阵的转置还是初等矩阵，其转置矩阵是同类型的初等矩阵，且

$$p(i, j)' = p(i, j), p(i(c))' = p(i(c)), p(i, j(k))' = p(j, i(k)).$$

这里 $c \neq 0$.

矩阵和乘法和初等变换的关系是

定理5.1 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, 对 A 施行一次行初等变换, 就相当于 A 左乘 s 级初等矩阵, 对 A 施行一次列初等变换, 就相当于 A 右乘 n 级初等矩阵. 详细地说:

1) $p(i, j)A$ 相当于把 A 的 i, j 两行互换; $A p(i, j)$ 相当于把

A 的 i, j 两列互换.

2) $p(i(c))A$ 相当于把 A 的第 i 行乘以非零数 c ; $A p(i(c))$ 相

当于把 A 的第 i 列乘以非零数 c .

3) $p(i, j(k))A$ 相当于 A 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上;

$A p(i, j(k))$ 相当于 A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

这相当于把A的 i, j 两行互换.

$$2) \quad P(i(c))A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \text{O} & & & \\ & & c & & \\ & & & \text{O} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \text{M} \\ A_i \\ \text{M} \\ A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \text{M} \\ cA_i \\ \text{M} \\ A_s \end{pmatrix},$$

这相当于把A的第i行乘以c.

$$3) \quad P(i, j(k))A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \text{O} & & & \\ & & 1 & \text{L} & k \\ & & & \text{O} & \text{M} \\ & & & & 1 \\ & & & & & \text{O} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \text{M} \\ A_i \\ \text{M} \\ A_j \\ \text{M} \\ A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \text{M} \\ A_i + kA_j \\ \text{M} \\ A_j \\ \text{M} \\ A_s \end{pmatrix},$$

这个定理能够用八个字概括：“左行右列，首尾为主”。



二、矩阵的等价

定义5.2 若矩阵A经过一系列初等变换得到能够化为B，则称A与B**等价的**（也称A与B相抵）。

注：1) 矩阵的等价关系具有：反射性、对称性、传递性；
2) 等价矩阵的秩相等。

由定理5.1立得

命题5.2 设A, B是同型矩阵，则A, B等价的充要条件是：存在初等矩阵 $P_1, P_2, L, P_s, Q_1, Q_2, L, Q_t$ ，使

$$B = P_1 P_2 L P_s A Q_1 Q_2 L Q_t .$$

与A等价的矩阵有许许多多，那么能否挑出一种简朴矩阵，把它作为A的代表呢？

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/656152152034010240>