第一学期上海市宝安区2024年高三第一次模拟考试数学试卷

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知等差数列$\{a_n\}$的公差为-2，前n项和为S_n，若a_2，a_3，a_4为某三角形的三边长，且该三角形有一个内角为$120°$，则S_n的最大值为（　）

A．5　　B．11　　C．20　　D．25

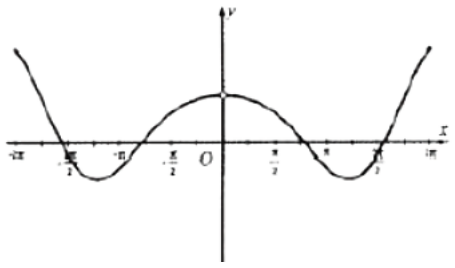
2．已知集合$A=\left\{x\middle|x+1\le 0\right\}$，$B=\{x\,|\,x\ge a\}$，若$A\cup B=R$，则实数$a$的值可以为（　）

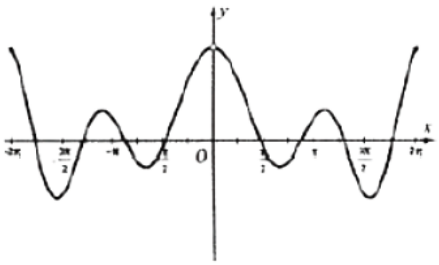
A．2　　B．1　　C．0　　D．-2

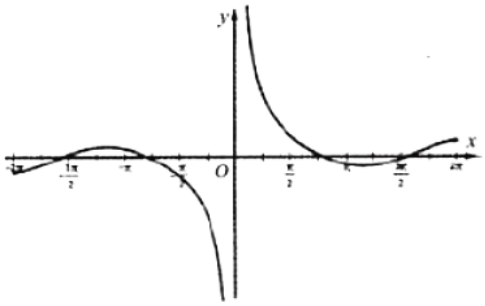
3．抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的准线与x轴的交点为点C，过点C作直线l与抛物线交于A、B两点，使得A是BC的中点，则直线l的斜率为（　　）

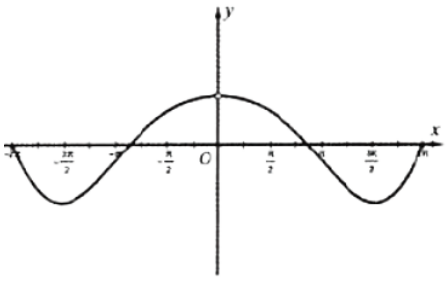
A．$\pm\frac{1}{3}$　　B．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．± 1　　D．$\pm\sqrt{3}$

4．函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{x^2\cos x}{20}$在$[-2\pi,0)\cup(0,2\pi]$上的图象大致为(　　)

A．

B．

C．

D．

5．用1，2，3，4，5组成不含重复数字的五位数，要求数字4不出现在首位和末位，数字1，3，5中有且仅有两个数字相邻，则满足条件的不同五位数的个数是（　）

A．48　　B．60　　C．72　　D．120

6．函数 $y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的单调递增区间是（　　）

A．$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　C．$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

7．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-a\left(0<a<A\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，若 $x_1+2x_2+x_3=\frac{5\pi}{3}$，则 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．π　　D．$\frac{4\pi}{3}$

8．已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{3},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\sin\left(\pi+\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{e}))=$（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．1　　C．-1　　D．0

10．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，若对于任意的 $\lambda\in R$，都有 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|$ 成立，则

A．$a//b$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{a}$　　D．$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$

11．已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x$，若 $2^a=\log_2 b=c,$则（　　）

A．*f*(*a*)<*f*(*b*) <*f*(*c*)　　B．*f*(*b*) <*f*(*c*) <*f*(*a*)

C．*f*(*a*) <*f*(*c*) <*f*(*b*)　　D．*f*(*c*) <*f*(*b*) <*f*(*a*)

12．已知 i 为虚数单位，若复数 $z=\frac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+1$，则 $\overline{z}=$

A．$\frac{9}{5}+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$

C．$1+\mathrm{i}$　　D．$-\mathrm{i}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $f\left(x\right)=e^x+e^{ax}$ 是偶函数，则 $f\left(x\right)$ 的最小值为_____.

14．已知正方体□□□□ − □$_1$□$_1$□$_1$□$_1$棱长为 2，点□是上底面□$_1$□$_1$□$_1$□$_1$内一动点，若三棱锥□ − □□□的外接球表面积恰为$\frac{41□}{4}$，则此时点□构成的图形面积为_____.

15．在三棱锥 $S-ABC$ 中，SA，SB，SC 两两垂直且 $SA=SB=SC=2$，点 M 为 $S-ABC$ 的外接球上任意一点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值为_____.

16．平面区域 $\begin{cases}3y+2x-1\geq 0\\ y+4x-7\leq 0\\ y-x-2\leq 0\end{cases}$ 的外接圆的方程是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知 $a>0$，$b>0$，函数 $f(x)=|2x+a|+|x-b|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

（1）求证：$a+2b=1$；

（2）若 $2a+b\geq tab$ 恒成立，求实数 t 的最大值.

18．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，l 是过定点 $P(4,2)$ 且倾斜角为 α 的直线；在极坐标系（以坐标原点 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴，取相同单位长度）中，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

（1）写出直线 l 的参数方程，并将曲线 C 的方程化为直角坐标方程；

（2）若曲线 C 与直线 l 相交于不同的两点 M、N，求 $|PM|+|PN|$ 的取值范围.

19．（12 分）已知函数 $f(x)=m\ln(1+x)-x$，$g(x)=mx-\sin x$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，求实数 m 的值；

（2）求证：$(1+\sin 1)\left(1+\sin\frac{1}{1\times 2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{2\times 3}\right)\cdots\left(1+\sin\frac{1}{(n-1)\times n}\right)<e^2$（$n\in N^*$，且 $n\geq 2$）.

20．（12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 B，圆 $C':x^2+y^2=4$ 与 y 轴的正半轴交于点 A，与 C 有且仅有两个交点且都在 C 轴上，$\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$（$O$ 为坐标原点）.

（1）求椭圆 C 的方程；

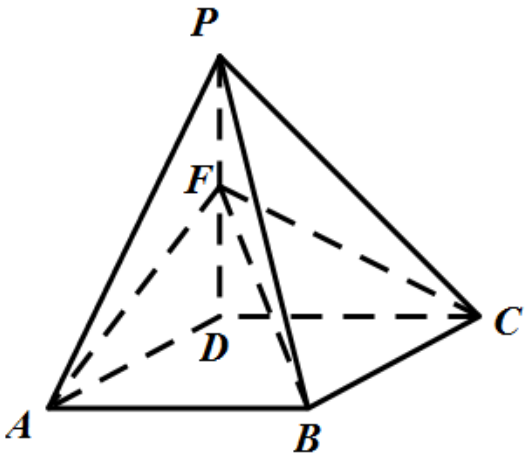
（2）已知点 $D\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，不过 D 点且斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，证明：直线 DM 与直线 DN 的斜率互为相反数.

21．（12 分）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.已知 $\cos 2C=-\frac{3}{4}$.

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）当$c=2a$，且$b=3\sqrt{7}$时，求$\triangle ABC$的面积.

22.（10分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle DAB=60°,\angle ADP=90°$，平面$ADP\perp$平面$ABCD$，点$F$为棱$PD$的中点.



（Ⅰ）在棱AB上是否存在一点E，使得AF∥平面PCE，并说明理由；

（Ⅱ）当二面角$D-FC-B$的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$时，求直线PB与平面$ABCD$所成的角.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由公差d=-2可知数列单调递减，再由余弦定理结合通项可求得首项，即可求出前n项和，从而得到最值.

【详解】

等差数列$\{a_n\}$的公差为-2，可知数列单调递减，则a_2，a_3，a_4中a_2最大，a_4最小，

又a_2，a_3，a_4为三角形的三边长，且最大内角为$120°$，

由余弦定理得$a_2^2=a_3^2+a_4^2+a_3a_4$，设首项为a_1，

即$(a_1-2)^2=(a_1-4)^2+(a_1-6)^2+(a_1-4)(a_1-6)=0$得$(a_1-4)(a_1-9)=0$，

所以$a_1=4$或$a_1=9$，又$a_4=a_1-6>0$,即$a_1>6$，$a_1=4$舍去，故$a_1=9$，d=-2

前n项和$S_n=9n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-(n-5)^2+25$.

故S_n的最大值为$S_5=25$.

故选：D

【点睛】

本题考查等差数列的通项公式和前 n 项和公式的应用，考查求前 n 项和的最值问题，同时还考查了余弦定理的应用.

2、D

【解析】

由题意可得$A=\{x\mid x\le -1\}$，根据$A\cup B=R$，即可得出$a\le -1$，从而求出结果.

【详解】

Q $A=\{x\mid x\le -1\},B=\{x\mid x\ge a\}$，且$A\cup B=R$，$\therefore a\le -1$，

$\therefore a$的值可以为-2.

故选：D.

【点睛】

考查描述法表示集合的定义，以及并集的定义及运算.

3、B

【解析】

设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，设直线AB的方程为$x=my-\frac{p}{2}$，由题意得出$y_1=\frac{y_2}{2}$，将直线l的方程与抛物线的方程联立，列出韦达定理，结合$y_1=\frac{y_2}{2}$可求得m的值，由此可得出直线l的斜率.

【详解】

由题意可知点$C\left(-\frac{p}{2},0\right)$，设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，设直线$AB$的方程为$x=my-\frac{p}{2}$，

由于点A是BC的中点，则$y_1=\frac{y_2}{2}$，

将直线l的方程与抛物线的方程联立得$\begin{cases}x=my-\frac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$，整理得$y^2-2mpy+p^2=0$，

由韦达定理得$y_1+y_2=3y_1=2mp$，得$y_1=\frac{2mp}{3}$，$y_1y_2=2y_1^2=\frac{8m^2p^2}{9}=p^2$，解得$m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

因此，直线 l 的斜率为 $\frac{1}{m}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查直线斜率的求解，考查直线与抛物线的综合问题，涉及韦达定理设而不求法的应用，考查运算求解能力，属于中等题.

4、A

【解析】

首先判断函数的奇偶性，再根据特殊值即可利用排除法解得；

【详解】

解：依题意，$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\frac{(-x)^2\cos(-x)}{20}=\frac{\sin x}{x}+\frac{x^2\cos x}{20}=f(x)$，故函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，排除 C；

而 $f(\pi)=-\frac{\pi^2}{20}<0$，排除 B；$f(2\pi)=\frac{\pi^2}{5}>0$，排除 D.

故选：A.

【点睛】

本题考查函数图象的识别，函数的奇偶性的应用，属于基础题.

5、A

【解析】

对数字 2 分类讨论，结合数字 1,3,5 中有且仅有两个数字相邻，利用分类计数原理，即可得到结论

【详解】

数字 2 出现在第 2 位时，数字 1,3,5 中相邻的数字出现在第 3,4 位或者 4,5 位，

共有 $C_3^2A_2^2A_2^2=12$ 个

数字 2 出现在第 4 位时，同理也有 12 个

数字 2 出现在第 3 位时，数字 1,3,5 中相邻的数字出现在第 1,2 位或者 4,5 位，

共有 $C_2^1C_3^2A_2^2A_2^2=24$ 个

故满足条件的不同的五位数的个数是 48 个

故选 A

【点睛】

本题主要考查了排列，组合及简单计数问题，解题的关键是对数字 2 分类讨论，属于基础题。

6、D

【解析】

利用辅助角公式,化简函数的解析式,再根据正弦函数的单调性,并采用整体法,可得结果.

【详解】

因为 $y=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，即函数的增区间为 $[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$，所以当 $k=0$ 时，增区间的一个子集为 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.

故选 D.

【点睛】

本题考查了辅助角公式,考查正弦型函数的单调递增区间,重点在于把握正弦函数的单调性，同时对于整体法的应用,使问题化繁为简,难度较易.

7、C

【解析】

根据题意，知当 $x=\frac{7\pi}{3\omega}$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$，由对称轴的性质可知 $x_1+x_2=\frac{2\pi}{3\omega}$ 和 $x_2+x_3=\frac{8\pi}{3\omega}$，即可求出 w，即可求出 $f\left(x\right)$ 的最小正周期.

【详解】

解：由于 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-a\left(0<a<A\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1，x_2，x_3，

当 $x=\frac{7\pi}{3\omega}$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$，

∴由对称轴可知 x_1，x_2 满足 $\omega x_1+\frac{\pi}{6}+\omega x_2+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\times 2$，

即 $x_1+x_2=\frac{2\pi}{3\omega}$.

同理 x_2，x_3 满足 $\omega x_2+\frac{\pi}{6}+\omega x_3+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\times 2$，即 $x_2+x_3=\frac{8\pi}{3\omega}$，

∴ $x_1+2x_2+x_3=\frac{10\pi}{3\omega}=\frac{5\pi}{3}$，$\omega=2$，

所以最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

故选：C.

【点睛】

本题考查正弦型函数的最小正周期，涉及函数的对称性的应用，考查计算能力.

8、B

【解析】

利用诱导公式以及同角三角函数基本关系式化简求解即可.

【详解】

$\because \cos\alpha=-\frac{1}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查诱导公式的应用，同角三角函数基本关系式的应用，考查计算能力.

9、A

【解析】

由函数$f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，求得$f(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}=-1$，进而求得$f(f(\frac{1}{e}))$的值，得到答案.

【详解】

由题意函数$f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，

则$f(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}=-1$，所以$f(f(\frac{1}{e}))=f(-1)=2^{-1}-(-1)^3=\frac{3}{2}$，故选 A.

【点睛】

本题主要考查了分段函数的求值问题，其中解答中根据分段函数的解析式，代入求解是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

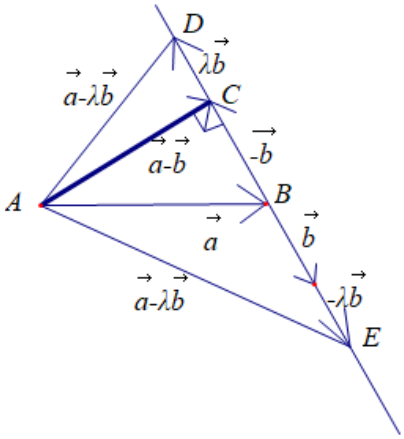
10、D

【解析】

画出$\vec{a}$，$\vec{b}$，根据向量的加减法，分别画出$(\vec{a}-\lambda\vec{b})$的几种情况，由数形结合可得结果.

【详解】

由题意，得向量$(\vec{a}-\vec{b})$是所有向量$(\vec{a}-\lambda\vec{b})$中模长最小的向量，如图，



当$AC\perp BC$，即$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$时，$|AC|$最小，满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|$，对于任意的$\lambda\in R$，

所以本题答案为D.

【点睛】

本题主要考查了空间向量的加减法，以及点到直线的距离最短问题，解题的关键在于用有向线段正确表示向量，属于基础题.

11、C

【解析】

利用导数求得$f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$上递增，结合$y=c$与$y=2^x,y=\log_2 x,y=x$图象，判断出a,b,c的大小关系，由此比较出$f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(c\right)$的大小关系.

【详解】

因为$f'(x)=(x-a)\mathrm{e}^x$，所以$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增；

在同一坐标系中作$y=c$与$y=2^x,y=\log_2 x,y=x$图象，

Q $2^a=\log_2 b=c$，可得$a<c<b$，故$f(a)<f(c)<f(b)$.

故选：C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/656154045050010125