

广西壮族自治区部分学校 2023-2024 学年高一下学期

开学考试数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 下列各角中，与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边相同的是 ()

A. $\frac{19\pi}{6}$

B. $-\frac{19\pi}{6}$

C. $\frac{11\pi}{6}$

D. $-\frac{11\pi}{6}$

【答案】C

【解析】因为 $\frac{11\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ ，所以 $\frac{11\pi}{6}$ 与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边相同，其他选项经检验不合题意.

故选：C.

2. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

A. $\{-1, 3\}$

B. $\{-3, 1\}$

C. $\{-1, 0, 3\}$

D. $\{-3, 0, 1\}$

【答案】A

【解析】由题意可得 $A = \{-1, 3\}$ ，则 $A \cap B = \{-1, 3\}$.

故选：A.

3. 设 $a > 1, b < 0$ ，则 ()

A. $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$

B. $a + b > ab$

C. $ab < -1$

D. $b < ab$

【答案】B

【解析】因为 $a > 1, b < 0$ ，所以 $ab < 0$ ，则 $\frac{a^2 + b^2}{ab} < 0$ ，则 A 选项错误；

因为 $a > 1$ ，所以 $1 - a < 0$ ，又 $b < 0$ ，则 $(1 - a)b > 0$ ，即 $b - ab > 0$ ，所以 $a + b - ab > 0$ ，即 $a + b > ab$ ，则 B 选项正确；

当 $a = 2, b = -\frac{1}{2}$ 时， $ab = -1$ ，则 C 选项错误；

高级中学名校试卷

因为 $a > 1, b < 0$ ，由 B 选项可知 $b - ab > 0$ ，所以 $b > ab$ ，则 D 选项错误。

故选：B.

4. 某人用手机记录了他连续 10 周每周的走路里程（单位：公里），其数据分别为 12, 15, 9, 8, 14, 11, 17, 10, 7, 16，则这组数据的 60% 分位数是（ ）

- A. 7 B. 12 C. 13 D. 14

【答案】C

【解析】将这组数据按从小到大的顺序排列为 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17，

因为 $10 \times 60\% = 6$ ，

则这组数据的 60% 分位数是这组数据中的第 6 个和第 7 个数据的平均数，即 $\frac{12+14}{2} = 13$ 。

故选：C.

5. 已知 $a = 3^{-0.3}, b = \cos 2, c = \lg 11$ ，则（ ）

- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

【答案】D

【解析】因为 $0 < a = 3^{-0.3} < 1, b = \cos 2 < 0, c = \lg 11 > \lg 10 = 1$ ，所以 $b < a < c$ 。

故选：D.

6. 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = ab$ ，则 $2ab - a + 7b$ 的最小值是（ ）

- A. 6 B. 9 C. 16 D. 19

【答案】C

【解析】因为 $a + b = ab$ 且 $a > 0, b > 0$ ，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，

$$\text{则 } 2ab - a + 7b = 2a - a + 2b + 7b = a + 9b = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 9b) = \frac{9b}{a} + \frac{a}{b} + 10$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{9b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 10 = 16, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} \frac{9b}{a} = \frac{a}{b} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \text{ 时,}$$

即当 $a = 4, b = \frac{4}{3}$ 时，等号成立，

高级中学名校试卷

因此, $2ab - a + 7b$ 的最小值是 16.

故选: C.

7. 已知甲袋中有标号分别为 1, 2, 3, 4 的四个小球, 乙袋中有标号分别为 2, 3, 4, 5 的四个小球, 这些球除标号外完全相同, 第一次从甲袋中取出一个小球, 第二次从乙袋中取出一个小球, 事件 A 表示“第一次取出的小球标号为 3”, 事件 B 表示“第二次取出的小球标号为偶数”, 事件 C 表示“两次取出的小球标号之和为 7”, 事件 D 表示“两次取出的小球标号之和为偶数”, 则 ()

A. A 与 C 相互独立

B. A 与 B 是对立事件

C. C 与 D 是对立事件

D. B 与 D 相互独立

【答案】D

【解析】由题意可得基本事件总数为 $4 \times 4 = 16$,

$$A = \{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\},$$

$$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\},$$

$$C = \{(2, 5), (3, 4), (4, 3)\},$$

$$D = \{(1, 3), (1, 5), (3, 3), (3, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\},$$

由题意可得 A 与 B 可以同时发生, 故不是对立事件,

易知 C 与 D 不同时发生, 为互斥事件, 但不是对立事件,

比如还可以有 (2, 3) 发生, 则 B, C 错误;

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{16}, P(D) = \frac{1}{2}, P(AC) = \frac{1}{16}, P(BD) = \frac{1}{4},$$

$$\text{则 } P(AC) \neq P(A)P(C), P(BD) = P(B)P(D),$$

从而 A 与 C 不相互独立, B 与 D 相互独立, 故 A 错误, D 正确.

故选: D.

8. 已知函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有且只有一个最大值点 (即取得最大值对应的自变量), 则 ω 的取值范围是 ()

A. $[1, 7]$

B. $(1, 7]$

C. $(1, 7)$

D. $(4, 7]$

【答案】B

【解析】由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, 由题意可得 $\frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{2}$,

解得 $1 < \omega \leq 7$, 即 ω 的取值范围是 $(1, 7]$.

故选: B

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, m)$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $m = 1$

B. 若 $m = 1$, 则 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

C. 若 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $m = 1$

D. 若 $m = 1$, 则 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】ABD

【解析】由 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 得 $\frac{m}{\sqrt{m^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 解得 $m = 1$ (负值舍去), 则 A 正确;

由 $m = 1$, 得 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 B, D 正确;

由 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 得 $\frac{-2}{\sqrt{m^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 解得 $m = \pm 1$, 则 C 错误.

故选: ABD.

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0$, 且

$f(xy) = f(x) \cdot f(y) - x^2 - y^2$, 则 ()

A. $f(1) = 1$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 的最小值是 1

D. 不等式 $f(x-2) < 10$ 的解集是 $(-1, 5)$

【答案】BCD

高级中学名校试卷

【解 析】对于 A，令 $x=y=1$ ，得 $f(1)=f(1)\cdot f(1)-1-1$ ，解得 $f(1)=-1$ 或 2 ，

因为 $f(x)>0$ ，所以 $f(1)=2$ ，则 A 错误；

对于 BC，令 $y=1$ ，得 $f(x)=f(x)f(1)-x^2-1=2f(x)-x^2-1$ ，则 $f(x)=x^2+1$ ，

从而 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)\geq 1$ ，故 B，C 正确；

对于 D，因为 $f(x)=x^2+1$ ， $f(x)$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(3)=10$ ，

所以不等式 $f(x-2)<10$ 等价于 $f(-3)<f(x-2)<f(3)$ ，

所以 $-3<x-2<3$ ，解得 $-1<x<5$ ，则 D 正确。

故选：BCD。

11. 某班语文老师对该班甲、乙、丙、丁 4 名同学连续 7 周每周阅读的天数（每周阅读天数可以是 1,2,3,4,5,6,7）进行统计，根据统计所得数据对这 4 名同学这 7 周每周的阅读天数分别做了如下描述：

甲：中位数为 3，众数为 5；

乙：中位数为 4，极差为 3；

丙：中位数为 4，平均数为 3；

丁：平均数为 3，方差为 3。

那么可以判断一周阅读天数一定没有出现 7 天的是（ ）

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

【答 案】ACD

【解 析】对于 A，因为中位数为 3，众数为 5，所以这 7 个数从小到大排列后，

第 4 个数是 3，所以 1,2,3 中一定有一个数出现 2 次，5 出现 3 次，

所以这 7 个数中一定没有出现 7，则 A 正确；

对于 B，因为中位数为 4，极差为 3，所以这 7 个数可以是 4,4,4,4,4,4,7，则 B 错误；

对于 C，若出现 1 个 7，则这 7 个数从小到大排列后，后 4 个数之和最小为 19，

前 3 个数之和最小为 3，从而这 7 个数的平均数最小为 $\frac{22}{7}>3$ ，

即这 7 个数的平均数不可能为 3，故 C 正确；

高级中学名校试卷

对于 D，设这 7 个数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 21$ ，

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 3)^2 + (x_5 - 3)^2 + (x_6 - 3)^2 + (x_7 - 3)^2 = 21,$$

若 $x_1 = 7$ ，则 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 14$ ，

$$(x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 3)^2 + (x_5 - 3)^2 + (x_6 - 3)^2 + (x_7 - 3)^2 = 5,$$

从而 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 这 6 个数可能是 4, 4, 4, 4, 4, 3 或 4, 4, 4, 4, 3, 2 或 4, 4, 4, 3, 2, 2

或 4, 4, 3, 2, 2, 2 或 4, 3, 2, 2, 2, 2 或 3, 2, 2, 2, 2, 2 或 5, 4, 3, 3, 3, 3 或 5, 3, 3, 3, 3, 2

或 4, 3, 3, 3, 3, 1 或 3, 3, 3, 3, 2, 1，这与 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 14$ 矛盾，

即这 7 个数中一定没有出现 7，故 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 甲、乙两人下象棋，已知甲获胜的概率是 $\frac{2}{3}$ ，平局的概率是 $\frac{1}{12}$ ，则乙获胜的概率是

_____.

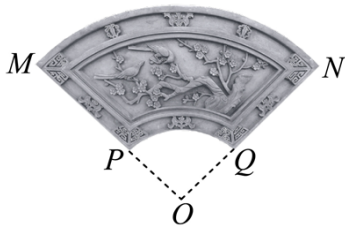
【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 设事件 A 表示“乙获胜”，则 $P(\bar{A}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ ，

则 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

故【答案】为： $\frac{1}{4}$.

13. 一扇环形砖雕如图所示，该扇环形砖雕可视为扇形 OMN 截去同心扇形 OPQ 所得的部分，已知 $PM = 6$ 分米，弧 MN 长为 4π 分米，弧 PQ 长为 2π 分米，则 $OP =$ _____ 分米，此扇环形砖雕的面积为 _____ 平方分米.



【答案】 6 18π

高级中学名校试卷

【解 析】设圆心角 $\angle POQ = \alpha$ ，则 $\alpha = \frac{2\pi}{OP} = \frac{4\pi}{OM} = \frac{4\pi}{OP+6}$ ，解得 $OP = 6$ 分米，

所以 $OM = 12$ 分米，

则此扇环形砖雕的面积为 $\frac{1}{2} \times 4\pi \times 12 - \frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 = 18\pi$ 平方分米.

故【答 案】为：6 18π .

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} (5m-3)x - 2m^2 + 1, & x < 1 \\ \log_m x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，则 m 的取值范围是

_____.

【答 案】 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) \cup [2, +\infty)$

【解 析】若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $\begin{cases} 5m-3 > 0, \\ m > 1, \\ 5m-3-2m^2+1 \leq \log_m 1, \end{cases}$ 解得 $m \geq 2$,

若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $\begin{cases} 5m-3 < 0, \\ 0 < m < 1, \\ 5m-3-2m^2+1 \geq \log_m 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{5}$,

故 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) \cup [2, +\infty)$.

故【答 案】为： $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) \cup [2, +\infty)$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 某环保小组共有 5 名成员，其中男成员有 2 人，现从这 5 人中随机选出 3 人去某社区进行环保宣传.

(1) 求所选的 3 人中恰有 1 名男成员的概率；

(2) 求所选的 3 人中至少有 2 名女成员的概率.

解：(1) 由题意可知该环保小组女成员有 3 人，记为 a, b, c ；男成员有 2 人，记为 d, e ，

从 5 名成员随机选出 3 人的情况有 $abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde$ ，共 10 种，

所选的 3 人中恰有 1 名男成员的情况有 $abd, abe, acd, ace, bcd, bce$ ，共 6 种，

高级中学名校试卷

则所选的 3 人中恰有 1 名男成员的概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

(2) 所选的 3 人中至少有 2 名女成员的情况有 $abc, abd, abe, acd, ace, bcd, bce$, 共 7 种,

则所选的 3 人中至少有 2 名女成员的概率 $P = \frac{7}{10}$.

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域.

解: (1) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $2k\pi - \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, 所以 $\frac{5\pi}{12} \leq x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$,

当 $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时,

$f(x)$ 取得最小值 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) - 1 = 0$;

当 $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时,

$f(x)$ 取得最大值 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) - 1 = 1$,

故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $[0, 1]$.

17. 某校为了解该校高三年级学生的物理成绩, 从某次高三年级物理测试中随机抽取 12 名男生和 8 名女生的测试试卷, 记录其物理成绩 (单位: 分), 得到如下数据:

12 名男生的物理成绩分别为 72、68、72、76、80、76、72、80、88、68、72、76;

高级中学名校试卷

8 名女生的物理成绩分别为 66、76、68、68、66、68、80、68.

(1) 求这 12 名男生物理成绩的平均分 $\bar{x}_1$ 与方差 s_1^2 ;

(2) 经计算得这 8 名女生物理成绩的平均分 $\bar{x}_2 = 70$, 方差 $s_2^2 = 23$, 求这 20 名学生物理成绩的平均分与方差.

附: 分层随机抽样的方差公式: $s^2 = \sum_{i=1}^n w_i \left[s_i^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \right]$, $w_i (i=1, 2)$ 表示第 $i (i=1, 2)$

层所占的比例.

解: (1) 这 12 名男生物理成绩的平均分为 $\bar{x}_1 = \frac{68 \times 2 + 72 \times 4 + 76 \times 3 + 80 \times 2 + 88}{12} = 75$,

方差为:

$$s_1^2 = \frac{(68-75)^2 \times 2 + (72-75)^2 \times 4 + (76-75)^2 \times 3 + (80-75)^2 \times 2 + (88-75)^2}{12} = \frac{89}{3}.$$

(2) 这 20 名学生物理成绩的平均分为 $\bar{x} = \frac{12}{20} \bar{x}_1 + \frac{8}{20} \bar{x}_2 = \frac{3 \times 75 + 2 \times 70}{5} = 73$,

$$\begin{aligned} \text{方差为 } s^2 &= \frac{12}{20} \left[s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 \right] + \frac{8}{20} \left[s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 \right] \\ &= \frac{3 \times \left[\frac{89}{3} + (75-73)^2 \right] + 2 \times [23 + (70-73)^2]}{5} = 33. \end{aligned}$$

18. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x) = \frac{2^x - a}{b \cdot 2^x + 1}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

(3) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $f(t^2 - kt + 5) + f(2t - k) \geq 0$, 求 k 的最大值.

解: (1) 题意可得 $f(0) = \frac{2^0 - a}{b \cdot 2^0 + 1} = 0$, 解得 $a = 1$,

因为 $f(-1) = -f(1)$, 所以 $\frac{2^{-1} - 1}{b \cdot 2^{-1} + 1} = -\frac{2^1 - 1}{b \cdot 2^1 + 1}$, 解得 $b = 1$,

经验证 $a = b = 1$, 符合题意.

(2) 证明: 由 (1) 可知 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$,

$$\text{任取 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)},$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 不等式 $f(t^2 - kt + 5) + f(2t - k) \geq 0$ 等价于 $f(t^2 - kt + 5) \geq -f(2t - k)$,

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(t^2 - kt + 5) \geq f(-2t + k)$,

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $t^2 - kt + 5 \geq -2t + k$, 即 $t^2 - (k - 2)t + 5 - k \geq 0$,

因为 $t \in \mathbf{R}$, 所以 $\Delta = (k - 2)^2 - 4(5 - k) \leq 0$,

解得 $-4 \leq k \leq 4$, 即 k 的最大值为 4.

19. 已知函数 $f(x + 1) = x^2 + x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的〔解析〕式;

(2) 求不等式 $f(x) \leq x + 2$ 的解集;

(3) 若存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $2f(\sin x) + (a + 2)\sin x + 3 \leq 0$, 求 a 的取值范围.

解: (1) 设 $t = x + 1$, 则 $x = t - 1$,

因为 $f(x + 1) = x^2 + x - 1$, 所以 $f(t) = (t - 1)^2 + (t - 1) - 1 = t^2 - t - 1$,

则 $f(x) = x^2 - x - 1$.

(2) 不等式 $f(x) \leq x + 2$, 即 $x^2 - x - 1 \leq x + 2$, 即 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$,

则 $(x - 3)(x + 1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$,

即不等式 $f(x) \leq x + 2$ 的解集为 $[-1, 3]$.

(3) 因为 $f(x) = x^2 - x - 1$, 所以 $f(\sin x) = \sin^2 x - \sin x - 1$,

则不等式 $2f(\sin x) + (a + 2)\sin x + 3 \leq 0$ 等价于不等式 $2\sin^2 x + a\sin x + 1 \leq 0$,

设 $t = \sin x \in [-1, 1]$, 则函数 $g(t) = 2t^2 + at + 1 (-1 \leq t \leq 1)$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/656155120231010112>