

滁州市 2023 年高三第一次教学质量监测

数学试题

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | e^x > 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】首先求集合 A，再求 $A \cap B$.

【详解】 $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ ，所以 $A = \{x | x > 0\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，所以 $A \cap B = \{1, 2\}$.

故选：B

2. 若复数 z 满足 $z\bar{z} - i\bar{z} = 3 - i$ ，则 z 的虚部为 ()

- A. -1 B. 2 C. 1 或 2 D. -1 或 2

【答案】D

【解析】

【分析】设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，然后利用复数的运算和概念即可求解

【详解】设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，因为 $z\bar{z} - i\bar{z} = 3 - i$ ，

即 $a^2 + b^2 - ai - b = 3 - i$ ，所以 $\begin{cases} a^2 + b^2 - b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$ ，解得： $b = -1$ 或 $b = 2$ ，

所以 z 的虚部为 -1 或 2，

故选：D.

3. 现有一组数据：663, 664, 665, 668, 671, 664, 656, 674, 651, 653, 652, 656，则这组数据的第 85 百分位数是 ()

- A. 652 B. 668 C. 671 D. 674

【答案】C

【解析】

【分析】根据百分位数的定义，求得 $12 \times 85\% = 10.2$ ，即可确定第 85 百分位数为第 11 个数，可得答案.

【详解】由题意这组数共 12 个，则 $12 \times 85\% = 10.2$ ，

将这组数据从小到大排列 651, 652, 653, 656, 656, 663, 664, 664, 665, 668, 671, 674,

故这组数据的第 85 百分位数为第 11 个数, 即 671,

故选: C

4. 5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式: $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$, 它表示在受噪音干扰的信道中, 最大信息传递速度 C 取决于信道带宽 W , 信道内信号的平均功率 S , 信道内部的高斯噪声功率 N 的大小, 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 当信噪比 $\frac{S}{N}$ 比较大时, 公式中真数里面的 1 可以忽略不计. 按照香农公式, 若不改变带宽 W , 而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 1000 提升至 12000, 则 C 大约增加了 (参考数据: $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$, $\lg 5 = 0.6990$) ()

A. 25%

B. 30%

C. 36%

D. 45%

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意将信噪比 $\frac{S}{N}$ 分别为 1000, 12000 代入香农公式, 列出等式, 利用换底公式即可求出 $\frac{C_2}{C_1}$, 即可求解.

【详解】因为当信噪比 $\frac{S}{N}$ 比较大时, 公式中真数里面的 1 可以忽略不计, 所以当 $\frac{S}{N} = 1000$ 时 $C_1 = W \log_2 1000$, 当 $\frac{S}{N} = 12000$ 时 $C_2 = W \log_2 12000$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{C_2}{C_1} &= \frac{\log_2 12000}{\log_2 1000} = \log_{1000} 12000 = \frac{\lg 12000}{\lg 1000} = \frac{\lg 3 + \lg 4 + \lg 1000}{\lg 1000} \\ &= \frac{\lg 3 + 2\lg 2 + 3}{3} \approx 1.36, \text{ 所以 } \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1} - 1 \approx 0.36, \end{aligned}$$

所以 C 大约增加了 36%,

故选: C.

5. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 4)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 ()

A. $(1, -2)$

B. $(-1, 2)$

C. $(1, 3)$

D. $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $|\vec{a}|\cos\theta\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ 计算即可解决.

【详解】由题知, $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(-2,4)$,

所以 $\vec{a}\vec{b}=-2+12=10, |\vec{b}|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$,

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ ,

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $|\vec{a}|\cos\theta\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{10}{20}(-2,4)=(-1,2)$,

故选: B.

6. 已知抛物线 $E_1: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率大于零的直线 l 与 E_1 相交于 A, B 两点, 若直线 l 与抛物线 $E_2: y^2=-4x$ 相切, 则 $|AB|=(\quad)$

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】由已知设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$, $k>0$, 由直线 AB 与抛物线 E_2 相切, 列方程求 k , 联立直线 AB 与抛物线 E_1 的方程, 利用设而不求法结合弦长公式求 $|AB|$.

【详解】抛物线 $E_1: y^2=4x$ 的焦点 F 的坐标为 $(1,0)$,

由已知可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$, $k>0$,

因为直线 AB 与抛物线 E_2 相切, 所以 $\begin{cases} y^2=-4x \\ y=kx-k \end{cases}$ 只有一组解,

所以方程 $k^2x^2-(2k^2-4)x+k^2=0$ 有且只有一个根,

故 $\Delta=[-(2k^2-4)]^2-4k^4=16-16k^2=0$, 又 $k>0$,

所以 $k=1$,

联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases}$, 消 y , 得 $x^2-6x+1=0$,

方程 $x^2-6x+1=0$ 的判别式 $\Delta=36-4>0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=6$,

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$,

故选: C.

7. 已知函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(0, \sqrt{3})$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 内恰有两个零点, 则实数 ω 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$

B. $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

C. $\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$

D. $\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】首先求 φ , 再根据 $x \in [0, \pi]$, 求 $\omega x + \frac{\pi}{3}$ 的范围, 结合正切函数的图象, 列不等式, 即可求 ω 的取值范围.

【详解】由条件可知 $f(0) = \tan \varphi = \sqrt{3}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

$$f(x) = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 当 } x \in [0, \pi] \text{ 时, } \omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \omega \cdot \pi + \frac{\pi}{3}\right],$$

若函数在区间 $[0, \pi]$ 上恰有 2 个零点, 则 $2\pi \leq \omega \cdot \pi + \frac{\pi}{3} < 3\pi$,

$$\text{解得 } \frac{5}{3} \leq \omega < \frac{8}{3}.$$

故选: D

8. 已知六棱锥的所有顶点都在半径为 2 的球的球面上, 当六棱锥的体积最大时, 其侧棱长为 ()

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

B. $2\sqrt{6}$

C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】结合球和正六棱锥的性质求出体积的表达式, 令 $f(x) = 4x^2 - x^3$ ($0 < x < 4$), 求导, 利用函数的单调性求得取最值时的条件, 进而求解即可.

【详解】由题意可知: 六棱锥的底面六边形的顶点在同一个截面圆上.

易知当六边形为正六边形时, 其面积最大. 要使六棱锥的体积最大, 则该六棱锥为正六棱锥.

不妨设正六边形的边长为 $a(0 < a \leq 2)$ ，六棱锥的高为 $h(0 < h < 4)$ ，

则正六边形的外接圆的半径为 a .由球的性质可知： $(h-2)^2 + a^2 = 4$ ，则 $a^2 = 4h - h^2$ ，

所以正六棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1}{2} a^2 \times \sin 60^\circ \times h = \frac{\sqrt{3}}{2} (4h^2 - h^3)$ ，

设 $f(x) = 4x^2 - x^3(0 < x < 4)$ ，则 $f'(x) = 8x - 3x^2$ ，

当 $x \in (0, \frac{8}{3})$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (\frac{8}{3}, 4)$ 时， $f'(x) < 0$ ，

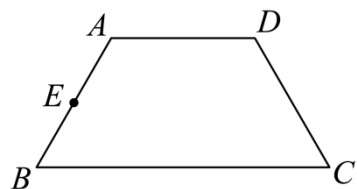
所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{8}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{8}{3}, 4)$ 上单调递减，当 $x = \frac{8}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值，

即 $h = \frac{8}{3}$ 时， V 取最大值，此时 $a^2 = \frac{32}{9}$ ，所以正六棱锥的侧棱长 $l = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{\frac{32}{9} + \frac{64}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，

故选：A.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知圆台的轴截面如图所示，其上、下底面半径分别为 $r_{\text{上}} = 1$ ， $r_{\text{下}} = 2$ ，母线 AB 长为 2，点 E 为 AB 的中点，则（ ）



A. 圆台的体积为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$

B. 圆台的侧面积为 12π

C. 圆台母线 AB 与底面所成角为 60°

D. 在圆台的侧面上，从点 C 到点 E 的最短路径长为 4

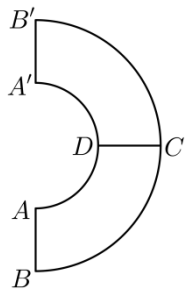
【答案】AC

【解析】

【分析】根据已知求体积;过 A 作 $AF \parallel O_1O_2$ 交底面于 F ，判断出 $\angle ABF$ 即为母线 AB 与底面所成角；作出圆台的侧面展开图，直接求出面积；圆台的侧面上，判断出从 C 到 E 的最短路径的长度为 CE ,等逐个判断即可求解.

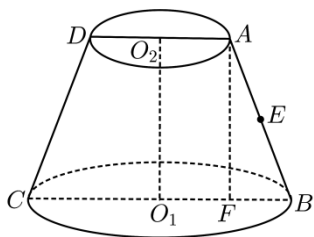
【详解】对于 A：圆台的高为 $\sqrt{3}$ ，则圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi \times (1^2 + 1 \times 2 + 2^2) \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3} (\text{cm}^3)$ ，A 正确；

对于 B：由题意，圆台的侧面展开图为半圆环，



其面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 \times 2 = 6\pi$. 故 B 错误；

对于 C：过 A 作 $AF \parallel O_1O_2$ 交底面于 F，则 $O_1O_2 \perp$ 底面，所以 $\angle ABF$ 即为母线 AB 与底面所成角.

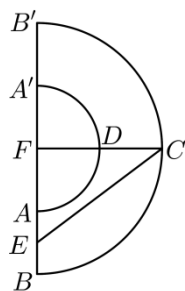


在等腰梯形 ABCD 中， $AB = 2$, $BF = 2 - 1 = 1$, 所以 $\cos \angle ABF = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{2}$.

因为 $\angle ABF$ 为锐角，所以 $\angle ABF = 60^\circ$. 故 C 正确；

对于 D：如图示，在圆台的侧面上，从 C 到 E 的最短路径的长度为 CE. 由题意可得： $FB = FC = 4$, $AB = 2$.

由 E 为 AB 中点，所以 $FE = 3$ ，所以 $CE = \sqrt{CF^2 + FE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 故 D 错误.



故选：AC

10. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点（不包含顶点），且 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则（ ）

A. $x + y = 1$

B. $x + 2y = 1$

C. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2}$

D. $\log_2 x + \log_2 y \leq -2$

【答案】AD

【解析】

【分析】利用平面向量 线性运算，结合基本不等式，验证各选项的结果.

【详解】 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点（不包含顶点），则有 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC} (0 < \lambda < 1)$,

得 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ ，即 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AB}$,

又 $\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ， $\therefore \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ ，

可得 $x + y = 1$ ， $0 < x < 1$ ， $0 < y < 1$ ， $2\sqrt{xy} \leq x + y = 1$ ， $xy \leq \frac{1}{4}$ ，

所以 A 选项正确，B 选项错误；

$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \leq x + y + x + y = 2$ ，当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时等号成立，所以 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$ ，

C 选项错误；

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy) \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$ ，D 选项正确.

故选：AD

11. 已知直线 $l: (1+a)x + y + 2a = 0 (a \in \mathbb{R})$ 与圆 $C: x^2 + (y-2)^2 = 4$ ，则 ()

- A. 直线 l 必过定点
B. 当 $a=1$ 时， l 被圆 C 截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
C. 直线 l 与圆 C 可能相切
D. 直线 l 与圆 C 不可能相离

【答案】ABD

【解析】

【分析】将直线 l 变形为 $x + y + a(x+2) = 0$ ，即可求定点坐标，即可判断 A；根据弦长公式求弦长，判断 B；根据直线 l 所过定点与圆 C 的关系，再结合直线方程的形式，即可判断 CD.

【详解】A. $l: x + y + a(x+2) = 0$ ，联立 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，所以直线过点 $(-2, 2)$ ，故 A 正确；

B. 当 $a=1$ 时， $l: 2x + y + 2 = 0$ ，圆心 $(0, 2)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ，弦长

$= 2\sqrt{r^2 - d^2} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ ，故 B 正确；

C. 直线所过定点 $(-2, 2)$ 在圆上，过点 $(-2, 2)$ 与圆 C 相切的直线是 $x = -2$ ，

但直线 $l: (1+a)x + y + 2a = 0 (a \in \mathbb{R})$, 表示斜率存在的直线, 表示不了直线 $x = -2$,

故不存在直线 l 与圆 C 相切, 故 C 错误;

D. 直线所过定点 $(-2, 2)$ 在圆上, 所以直线 l 与圆 C 总有公共点, 不可能相离, 故 D 正确.

故选: ABD

12. 已知函数 $f(x) = e^{tx} - \ln x + (t-1)x$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 t 的可能的值为 ()

A. $\frac{1}{e}$

B. $\frac{1}{2e}$

C. $\frac{1}{e^2}$

D. $\frac{2}{e}$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据 $f(x) \geq 0$ 转化成 $e^{tx} + tx \geq \ln x + e^{\ln x}$ 恒成立, 构造函数 $g(x) = e^x + x$, 利用导数求解 $g(x)$ 的单调性, 问题进一步转化成 $tx^3 \ln x$ 恒成立, 构造 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求解最值即可.

【详解】 $f(x) = e^{tx} - \ln x + (t-1)x \geq 0 \Rightarrow e^{tx} + tx \geq \ln x + x \Rightarrow e^{tx} + tx \geq \ln x + e^{\ln x}$,

故 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 转化成 $e^{tx} + tx \geq \ln x + e^{\ln x}$ 恒成立,

记 $g(x) = e^x + x$, $g'(x) = e^x + 1 > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 故由 $e^{tx} + tx \geq \ln x + e^{\ln x}$ 得

$g(tx)^3 \geq g(\ln x)$, 故 $tx^3 \ln x$ 恒成立,

记 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 故当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$

单调递增, 故当 $x = e$ 时, $h(x)$ 取最大值 $\frac{1}{e}$,

故由 $tx^3 \ln x \geq \ln x$ 恒成立, 即 $t \geq \left(\frac{\ln x}{x} \right)_{\max}$, 故 $t \geq \frac{1}{e}$,

故选: AD

【点睛】本题主要考查导数在函数中的应用, 着重考查了转化与化归思想、逻辑推理能力与计算能力, 对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行: (1) 考查导数的几何意义, 求解曲线在某点处的切线方程; (2) 利用导数求函数的单调区间, 判断单调性; 已知单调性, 求参数; (3) 利用导数求函数的最值(极值), 解决函数的恒成立与有解问题, 同时注意数形结合思想的应用.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若 $P(0 \leq X \leq 1) = P(5 \leq X \leq 6)$, 则 $\mu =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据正态分布曲线的对称性即可求解.

【详解】由于 $P(0 \leq X \leq 1) = P(5 \leq X \leq 6)$, 可知正态分布曲线关于 $x=3$ 对称, 故 $\mu=3$

故答案为: 3

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, $S_5 < 3a_4$, 写出满足题意的一个通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2n-4$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】设等差数列的首项为 a_1 , 利用已知条件求出 a_1 的范围, 写出等差数列的通项公式即可.

【详解】设等差数列的首项为 a_1 , 且公差 $d=2$,

$$\text{则 } S_5 < 3a_4 \Leftrightarrow 5a_1 + 10d < 3a_1 + 9d,$$

$$\text{即 } a_1 < -1, \text{ 所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 2 + a_1,$$

$$\text{令 } k = -2 + a_1 < -3, \text{ 所以 } a_n = 2n + k (k < -3),$$

$$\text{所以可取 } a_n = 2n - 4$$

故答案为: $2n-4$ (答案不唯一)

15. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为偶函数, $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称, 若

$$f(x) + g(x) = x^2 - 1, \text{ 则 } f(2)g(2) \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】2

【解析】

【分析】通过赋值得 $f(2) + g(2) = 3$, 结合函数对称性, 奇偶性得到

$$f(x) + g(x) = f(2-x) - g(2-x) = x^2 - 1, \text{ 则 } f(2) - g(2) = -1, \text{ 解出即可.}$$

【详解】因为 $f(x) + g(x) = x^2 - 1$, 令 $x=2$ 得 $f(2) + g(2) = 3$,

又因为 $f(x+1)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称,

$$\text{即 } f(x) = f(2-x) \text{ ①}$$

又因为 $g(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 中心对称,

所以函数 $h(x) = g(x+1)$ 是奇函数, 即 $h(-x) = -h(x)$,

$$g(-x+1) = -g(x+1), \text{ 令 } -x+1 \text{ 代换 } x, \text{ 得 } g(x) = -g(-x+2) \text{ ②}$$

则将①②代入 $f(x) + g(x)$ 得 $f(x) + g(x) = f(2-x) - g(2-x) = x^2 - 1$

令 $x=0$ 得 $f(2) - g(2) = -1$ 结合 $f(2) + g(2) = 3$, 解得 $f(2) = 1, g(2) = 2$,

所以 $f(2)g(2) = 2$,

故答案为: 2.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 过椭圆 C 的右焦点 F 且不与两坐标轴平行的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 若 x 轴上的点 P 满足 $|PA| = |PB|$ 且 $|PF| > \frac{2}{3}$ 恒成立, 则椭圆 C 离心率 e 的取值范围为

_____.

【答案】 $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

【解析】

【分析】根据给定条件, 设出直线 AB 的方程, 与椭圆方程联立, 求出线段 AB 中点横坐标, 即可列式求解作答.

【详解】依题意, 点 $F(1, 0)$, 设直线 $AB: x = ty + 1, t \neq 0, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + 1 \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得: } (b^2t^2 + a^2)y^2 + 2b^2ty + b^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{2b^2t}{b^2t^2 + a^2}, y_1y_2 = \frac{b^2 - a^2b^2}{b^2t^2 + a^2}, \text{ 线段 } AB \text{ 的中点 } M\left(\frac{a^2}{b^2t^2 + a^2}, -\frac{b^2t}{b^2t^2 + a^2}\right),$$

$$\text{因为 } |PA| = |PB|, \text{ 则有 } PM \perp AB, \text{ 直线 } PM: y + \frac{b^2t}{b^2t^2 + a^2} = -t\left(x - \frac{a^2}{b^2t^2 + a^2}\right),$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得点 } P\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2t^2 + a^2}, 0\right), \text{ 而 } a^2 - b^2 = 1, \text{ 有 } \frac{a^2 - b^2}{b^2t^2 + a^2} = \frac{1}{b^2t^2 + a^2} < 1,$$

$$\text{又 } |PF| > \frac{2}{3}, \text{ 即 } 1 - \frac{1}{b^2t^2 + a^2} > \frac{2}{3}, \text{ 因此 } 0 < \frac{1}{b^2t^2 + a^2} < \frac{1}{3}, \text{ 即 } b^2t^2 + a^2 > 3,$$

$$\text{依题意, } b^2t^2 + a^2 > 3 \text{ 恒成立, 而恒有 } b^2t^2 + a^2 > a^2, \text{ 因此 } a^2 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{3}, \text{ 离心率 } e = \frac{1}{a} \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/656202032010010031>