

直线与圆的方程强化训练题

1、 已知直线 $l_1: (2a+b)x + (a+b)y + (a-b) = 0$ 与直线 $l_2: m^2x - \frac{4}{3}n^2y + 4 = 0$.

(1) 当实数 a, b 变化时, 求证: 直线 l_1 过定点, 并求出这个定点的坐标;

(2) 若直线 l_2 通过直线 l_1 的定点, 求点 (m, n) 所在曲线 C 的方程;

(3) 在(2)的条件下, 设 $F(-1, 0), F(1, 0), P(x_0, 0) (x_0 > 0)$, 过点 P 的直线交曲线 C 于 A, B 两点(A, B 两点都在 x 轴上方), 且 $\frac{\overrightarrow{FA_1}}{\overrightarrow{FA_2}} = 3 \frac{\overrightarrow{FB_1}}{\overrightarrow{FB_2}}$, 求此直线的方程.

【答案】(1) 定点的坐标为 $(-2, 3)$. (2) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. (3) PA 的方程为 $x + 2y - 2 = 0$.

【解析】本试题主要考查了直线的位置关系的运用, 以及求解轨迹方程和直线方程的综合运用.

(1) 因为直线 $l_1: (2a+b)x + (a+b)y + (a-b) = 0$ 与直线 $l_2: m^2x - \frac{4}{3}n^2y + 4 = 0$.

, 那么当实数 a, b 变化时, 直线 l_1 表示为过两条直线交点的直线系方程可知其过定点, 并求出这个定点的坐标;

(2) 因为直线 l_2 通过直线 l_1 的定点, 则可知点 (m, n) 所在曲线 C 的方程;

(3) 在(2)的条件下, 设 $F(-1, 0), F(1, 0), P(x_0, 0) (x_0 > 0)$, 过点 P 的直线交曲线 C 于 A, B 两点(A, B 两点都在 x 轴上方), 且 $\frac{\overrightarrow{FA_1}}{\overrightarrow{FA_2}} = 3 \frac{\overrightarrow{FB_1}}{\overrightarrow{FB_2}}$, 运用向量的共线的知识得到结论.

(1) l_1 的方程化为 $(2x+y+1)a + (x+y-1)b = 0$, 由题意, $\begin{cases} 2x+y+1=0, \\ x+y-1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=3. \end{cases}$ 所以定点

的坐标为 $(-2, 3)$.

(2) 由 l_2 过定点 $(-2, 3)$, 得 $m^2 \times (-2) - \frac{4}{3}n^2 \times 3 + 4 = 0$, 化简得 $\frac{m^2}{2} + n^2 = 1$, 所以点 (m, n) 所在曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(3) 因为 $\frac{\overrightarrow{FA_1}}{\overrightarrow{FA_2}} = 3 \frac{\overrightarrow{FB_1}}{\overrightarrow{FB_2}}$, 所以 $FA_1 \parallel FB_2$, 且 $FA_1 = 3FB_2$,

所以 $PF_1 = 3PF_2$, 所以 $x_0 + 1 = 3(x_0 - 1)$, 所以 $x_0 = 2$, 所以 $P(2, 0)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{\overrightarrow{FA_1}}{\overrightarrow{FA_2}} = (x_1 + 1, y_1), \frac{\overrightarrow{FB_1}}{\overrightarrow{FB_2}} = (x_2 - 1, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB} \\ x_1 + 1 = 3(x_2 - 1) \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 + 1 = 3(x_2 - 1) \\ y_1 = 3y_2 \end{cases} \text{ ①, ②, 又由 } \begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 = 2 \\ x_2^2 + 2y_2^2 = 2 \end{cases} \text{ ③, ④}$$

$$\text{由①②③④解之得 } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \text{ 所以 } A(0,1),$$

所以 PA 的方程为 $x + 2y - 2 = 0$.

2、设直线 l 的方程为 $(a+1)x + y + 2 - a = 0 (a \in R)$.

(1) 若 l 在两坐标轴上的截距相等, 求 l 的方程;

(2) 若 l 不经过第二象限, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $x + y + 2 = 0$. (2) $a \leq -1$.

【解析】

试题分析:

(I) 根据直线方程求出它在两坐标轴上的截距, 根据它在两坐标轴上的截距相等, 求出 a 的值, 即得直线 l 方程.

(II) 把直线方程化为斜截式为 $y = -(a+1)x - a - 2$, 若 l 不经过第二象限, 则 $a = -1$ 或 $-(a+1) \geq 0, -a-2 \leq 0$, 由此求得实数 a 的取值范围.

解: (1) 当直线过原点时, 该直线在 x 轴和 y 轴上的截距都为零, 截距相等,

$\therefore a = 2$, 方程即 $3x + y = 0$.

若 $a \neq 2$, 由于截距存在, $\therefore \frac{a-2}{a+1} = a-2$,

即 $a+1=1$, $\therefore a=0$, 方程即 $x + y + 2 = 0$.

(2) 法一: 将 l 的方程化为 $y = -(a+1)x + a - 2$,

$\therefore$ 欲使 l 不经过第二象限, 当且仅当 $\begin{cases} -(a+1) \geq 0 \\ a-2 \leq 0 \end{cases}$

$\therefore a \leq -1$. 所以 a 的取值范围是 $a \leq -1$.

法二: 将 l 的方程化为 $(x+y+2) + a(x-1) = 0 (a \in R)$,

它表示过 $l_1: x+y+2=0$ 与 $l_2: x-1=0$ 的交点 $(1, -3)$ 的直线系 (不包括 $x=1$). 由图象可知 l 的斜率 $-(a+1) \geq 0$ 时, l 不经过第二象限, $\therefore a \leq -1$.

考点: 本题主要考查直线方程的一般式, 直线在坐标轴上的截距的定义, 直线在坐标系中的位置与它的斜率、截距的关系, 属于基础题

点评: 解决该试题的易错点是对直线在坐标轴上截距相等的理解中, 缺少过原点的情况的分析.

3、已知三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(-1, 5)$ 、 $B(-2, -1)$ 、 $C(4, 3)$, M 是 BC 边上的中点.

(1) 求 AB 边所在的直线方程;

(2) 求中线 AM 的长

(3) 求 AB 边的高所在直线方程.

(1) $6x - y + 11 = 0$ (2) $2x + y - 3 = 0$ (3) $x + 6y - 22 = 0$

【解析】(1) 先根据斜率公式求出 AB 的斜率, 写出点斜式方程再化成一般式即可. (2) 先根据中点坐标公式求出中点 M 的坐标, 然后求出 AM 的斜率, 写出点

斜式方程再化成一般式方程.

(3) 根据 AB 的斜率可求出 AB 边上的高的斜率, 再根据它过点 C, 从而可求出高线的点斜式方程, 再化成一般式即可.

4、求满足下列条件的直线 l 方程

(1) 直线 l 过原点且与直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$;

(2) 直线 l 过直线 $l_1: x + 3y - 1 = 0$ 与 $l_2: 2x - y + 5 = 0$ 的交点, 且点 $A(2,1)$ 到 l 的距离为 $2\sqrt{2}$.

【答案】(1) $y = 0$ 或 $\sqrt{3}x - y = 0$; (2) $x + y + 1 = 0$ 或 $x - y + 3 = 0$.

【解析】本题考查直线方程的求法, 是基础题. 解题时要认真审题, 注意直线与直线垂直、直线与直线平行、直线交点等知识点的合理运用.

(1) 因为直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 由条件, 直线 l 的倾斜角应为 0 或 $\frac{\pi}{3}$, 所以直线 l 的斜率

$k = 0$ 或 $\sqrt{3}$, 又直线 l 过原点, 所以直线 l 的方程为:

$$y = 0 \text{ 或 } \sqrt{3}x - y = 0$$

(2) 由条件设直线 l 为 $x + 3y - 1 + \lambda(2x - y + 5) = 0$, 整理得

$$(2\lambda + 1)x + (3 - \lambda)y - 1 + 5\lambda = 0, \text{ 点 } A(2,1) \text{ 到 } l \text{ 的距离为 } \sqrt{2}$$

解 (1) 直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 由条件, 直线 l 的倾斜角应为 0 或 $\frac{\pi}{3}$, 所以直线 l 的斜率 $k = 0$ 或 $\sqrt{3}$,

又直线 l 过原点, 所以直线 l 的方程为:

$$y = 0 \text{ 或 } \sqrt{3}x - y = 0$$

(2) 由条件设直线 l 为 $x + 3y - 1 + \lambda(2x - y + 5) = 0$, 整理得

$$(2\lambda + 1)x + (3 - \lambda)y - 1 + 5\lambda = 0, \text{ 点 } A(2,1) \text{ 到 } l \text{ 的距离为 } 2\sqrt{2}, \text{ 则}$$

$$\frac{|4 + 8\lambda|}{\sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (3 - \lambda)^2}} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 或 } -4, \text{ 所以直线 } l \text{ 为}$$

$$x + y + 1 = 0 \text{ 或 } x - y + 3 = 0$$

5、已知: $d^p = (x, 2), b^p = (x, 1)$

(1) 若 $\frac{d^p}{a} // \frac{b^p}{b}$, 求 x ;

(2) 若函数 $f(x) = \frac{d^p}{a} \cdot \frac{b^p}{b}$ 对应的图象记为 C

(3) 求曲线 C 在 $A(1,3)$ 处的切线方程? (II) 若直线 l 为曲线 C 的切线, 并且直线 l 与曲线 C 有且

仅有一个公共点，求所有这样直线 l 的方程？

【答案】 (1) $x=2$ 或 0 (2) $y=3x$ (3) $y=2$

【解析】 本试题主要是考查了向量的共线，以及曲线的切线方程求解，直线与曲线的交点问题的综合运用

(1) 由于向量共线，那么根据坐标关系式得到参数 x 的值.

(2) 由于函数 $f(x) = d \cdot b = x^3 + 2$ 则由 $f'(x) = 3x^2, k = f'(1) = 3$, 得到切线方程.

设切点坐标 $P(t, t^3 + 2)$,

曲线 C 在 P 处的切线方程为 $y - (t^3 + 2) = 3t^2(x - t)$, 即 $y = 3t^2x - 2t^3 + 2$, 然后联立方程组, 得到参数 t 的值.

解: $\overset{\rho}{a} = (x^2, 2), \overset{\rho}{b} = (x, 1)$

(1) $x=2$ 或 03 分; [$x=2$ 给两分]

(2) 函数 $f(x) = \overset{\rho}{a} \cdot \overset{\rho}{b} = x^3 + 2$

(I) $f'(x) = 3x^2, k = f'(1) = 3$,

曲线 C 在 $A(1, 3)$ 处的切线方程为 $y - 3 = 3(x - 1)$, 即 $y = 3x$

(II) 设切点坐标 $P(t, t^3 + 2)$,

曲线 C 在 P 处的切线方程为 $y - (t^3 + 2) = 3t^2(x - t)$, 即 $y = 3t^2x - 2t^3 + 2$

由 $\begin{cases} y = 3t^2x - 2t^3 + 2 \\ y = x^3 + 2 \end{cases}$ 得 $3t^2x - 2t^3 + 2 = x^3 + 2$ 即 $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$

$(x - t)^2(x + 2t) = 0$ [或者 $(x - t)(x^2 + tx - 2t^2) = 0$]

由题意得 $t=0$, l 的方程为 $y=2$

6、若方程 $x^2 - my^2 + 2x + 2y = 0$ 表示两条直线，求 m 的值.

【答案】 $m=1$

【解析】 解：当 $m=0$ 时，显然不成立

当 $m \neq 0$ 时，配方得 $(x+1)^2 = m(y - \frac{1}{m})^2 + 1 - \frac{1}{m}$

⊙ 方程表示两条直线， $\therefore$ 当且仅当有 $1 - \frac{1}{m} = 0$ ，即 $m=1$

7、直线 l 过点 $(1, 2)$ 和第一，二，四象限，若 l 的两截距之和为 6. 求直线 l 的方程

【答案】 $2x+y-4=0$ 或 $x=y-3=0$

【解析】解：设直线 l 的横截距为 a ，

则纵截距为 $b-a$

$$l \text{ 的方程为 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b-a} = 1$$

点 $(1, 2)$ 在直线 l 上

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b-a} = 1$$

$$\text{即 } a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\text{解得 } a_1 = 2, a_2 = 3$$

当 $a=2$ 时，方程 $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ ，直线经过第一，二，四象限，

当 $a=3$ 时直线的方程为 $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

直线 l 经过第一，二，四象限

综上知，直线 l 的方程为 $2x+y-4=0$ 或 $x+y-3=0$

8、求经过点 $A(1,2)$ ，且满足下列条件的直线方程：

(1) 倾斜角的正弦为 $\frac{5}{13}$ ； (2) 与两坐标轴的正半轴围成的三角形面积为4.

【答案】(1) $5x-12y+19=0$ 或 $5x+12y-29=0$. (2) $2x+y-4=0$.

【解析】本试题主要是考查了直线方程的求解的运用.

(1) 设直线倾斜角为 α $\alpha \in [0, \pi)$ ，由 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ，得 $\cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$ ， $\therefore \tan \alpha = \pm \frac{5}{12}$

当 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ 时，由直线点斜式方程得 $y-2 = \frac{5}{12}(x-1)$ ，即 $5x-12y+19=0$ ；当 $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ 时，由

直线点斜式方程得 $y-2 = -\frac{5}{12}(x-1)$ ，

$$\text{即 } 5x+12y-29=0;$$

综上，直线方程为 $5x-12y+19=0$ 或 $5x+12y-29=0$.

(2) 设直线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 $a, b(a > 0, b > 0)$ ，可设直线方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，由题意得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab = 4, \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \end{cases}$$

所以直线方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ ，即 $2x+y-4=0$.

9、过点 $P(4, 2)$ 作直线 l 交 x 轴于 A 点、交 y 轴于 B 点，且 P 位于 AB 两点之间.

(I) $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ ，求直线 l 的方程；

(II) 求当 $\frac{AP}{PB}$ 取得最小值时直线 l 的方程.

【答案】显然直线 l 的斜率 k 存在且 $k \neq 0$,

设 $l: y = k(x - 4) + 2$, 得 $A(4 - \frac{2}{k}, 0)$, $B(0, 2 - 4k)$.

因为 P 位于 AB 两点之间, 所以 $4 - \frac{2}{k} > 4$ 且 $2 - 4k > 2$, 所以 $k < 0$.

$\frac{AP}{PB} = (\frac{2}{k}, 2)$, $\frac{PB}{PB} = (-4, -4k)$.

(I) $\frac{AP}{PB} = 3 \frac{PB}{PB}$, 所以 $\frac{2}{k} = 3 \cdot (-4)$, 所以 $k = -\frac{1}{6}$, 直线 l 的方程为 $x + 6y - 16 = 0$.

(II) $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{PB}{PB} = 8((-k) + (-\frac{1}{k})) \geq 16$, 当 $-k = -\frac{1}{k}$ 即 $k = -1$ 时, 等号成立.

所以当 $\frac{AP}{PB}$ 取得最小值时直线 l 的方程为 $x + y - 6 = 0$.

10、已知过点 $A(1, 1)$ 且斜率为 $-m$ ($m > 0$) 的直线 l 与 x, y 轴分别交于 P, Q 两点, 分别过 P, Q 作直线 $2x + y = 0$ 的垂线, 垂足分别为 R, S , 求四边形 $PRSQ$ 的面积的最小值.

设直线 l 方程为 $y - 1 = -m(x - 1)$, 则 $P(1 + \frac{1}{m}, 0)$, $Q(0, 1 + m)$

从而 PR 和 QS 的方程分别为 $x - 2y - \frac{m+1}{m} = 0$ 和 $x - 2y + 2(m+1) = 0$,

又 $PR \parallel QS \therefore RS = \frac{|2m+2+1+\frac{1}{m}|}{\sqrt{5}} = \frac{3+2m+\frac{1}{m}}{\sqrt{5}}$, 又 $|PR| = \frac{2+\frac{2}{m}}{\sqrt{5}}, |QS| = \frac{m+1}{\sqrt{5}}$

四边形 $PRSQ$ 为梯形

$\therefore S_{PRSQ} = \frac{1}{5}(m + \frac{1}{m} + \frac{9}{4})^2 - \frac{1}{80} \geq \frac{1}{5}(2 + \frac{9}{4})^2 - \frac{1}{80} = \frac{18}{5}$

$\therefore$ 四边形 $PRSQ$ 的面积的最小值为 $\frac{18}{5}$

11、求圆 $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 关于原点对称的圆的方程, 并求这两个圆的外公切线方程.

圆 $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 关于原点对称的圆为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$, 因为两圆的圆半径相等, 所以

两条外公切线均与两圆的连心线平行, 两圆连心线斜率为 $\frac{4}{3}$

得两条外公切线方程为 $4x - 3y + c = 0$, 又圆心到外公切线的距离等于圆半径 $\therefore \frac{|c|}{5} = 2$, 即 $|c| = 10$,

$\therefore c = \pm 10$.

$\therefore$ 两条外公切线方程为 $4x - 3y \pm 10 = 0$.

12、已知 A (4, -3)、B (2, -1) 和直线 L: $4x+3y-2=0$, 求一点 P, 使 $|PA|=|PB|$, 且点 P 到 L 的距离等于 2.

【解析】设点 P 的坐标为 (3, -2), $k_{AB} = \frac{-3+1}{4-2} = -1$, $\therefore$ 线段的垂直平分线方程为 $y+2=x-3$, 即

$x-y-5=0$ 点 P (a, b) 在直线 $x-y-5=0$ 上, 故 $a-b-5=0$

$$\text{又 } \frac{|4a+3b-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$$

$$\text{又两个式子得: } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{27}{7} \\ b=-\frac{8}{7} \end{cases}$$

$\therefore$ 所求的点为 P (1, -4) 和 P ($\frac{27}{7}$, $-\frac{8}{7}$).

13、直线 L 在两坐标轴上的截距相等, 且 p (4, 3) 到直线 L 的距离为 $3\sqrt{2}$, 求直线 L 的方程.

【解析】(1) 当所求直线经过坐标原点时, 设其直线方程为 $y=kx$

$$\text{由 } 3\sqrt{2} = \frac{|4k-3|}{\sqrt{1+k^2}} \text{ 解得 } k = -6 \pm \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

(2) 当直线不经过坐标原点时, 设所求方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ 即 $x+y-a=0$

由条件可得: $\angle = 3\sqrt{2}$

解得: $a=1$ 或 $a=13$, 故所求直线方程为 $x+y-1=0$ 或 $x+y-13=0$ 或 $y = - (6 \pm \frac{3\sqrt{14}}{2}) x$.

14、求以三点 A (0, 2), B (2, 0) C (3, 3) 为顶点的三角形的三条中线的长度.

【解析】AB 的中点 M 为 (1, 1), BC 的中点 N ($\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$), AC 的中点 P ($\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$)

$$\therefore \text{三条中线的长度为: } |AN| = \frac{\sqrt{26}}{2}, |CM| = 2\sqrt{2}, |BP| = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

15、求函数 $y = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-10x+29}$ 的最小值.

【解析】 $y = \sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (-2-0)^2}$ 可以看作是 x 轴上的动点 P(x, 0) 到两定点 A (0, 3)、B (5, -2) 的距离之和, 由“两点之间线段最短”可知, 当 A、P、B 三点共线即 $x=3$ 时 $y_{\min} = |AB| = 5\sqrt{2}$.

16、在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A (3, -1), $\angle B$ 的内角平分线 BD 所在的直线方程是 $x-3y+6=0$, AB 边

上的中线 CE 所在的直线方程是 $x+y-8=0$ ，求点 B 的坐标和边 BC 所在的直线方程.

【解析】 设 B 点坐标为 (x,y) ，因为 E 是 AB 中点，所以 $E(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2})$. 因为 CE 所在直线方程为 $x+y-8=0$ ，所以 $\frac{x+3}{2} + \frac{y-1}{2} - 8 = 0$ ，即 $x+y-14=0$ ①

而 BD 所在直线方程为 $x-3y+6=0$ ②

联立方程①②可得 $\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}$ ，所以 B 点坐标为 $(9,5)$

因为 BD 是 $\angle B$ 的平分线，所以点 $A(3,-1)$ 关于 BD 所在直线的对称点 A' 在 BC 所在直线上. 设

$A'(x',y')$ ，则有 $\begin{cases} \frac{x'+3}{2} + 3 \times \frac{y'-1}{2} + 6 = 0 \\ \frac{y'+1}{x'-3} = -3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x' = \frac{9}{2} \\ y' = -\frac{11}{2} \end{cases}$ ，所以 $A'(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2})$. 则 BC 所在直线方程

等价于 BA' 所在直线方程 $7x-3y-48=0$.

17、若圆 C 经过坐标原点和点 $(6,0)$ ，且与直线 $y=1$ 相切，从圆 C 外一点 $P(a,b)$ 向该圆引切线 PT，T 为切点，

(I) 求圆 C 的方程；

(II) 已知点 $Q(2,-2)$ ，且 $PT=PQ$ ，试判断点 P 是否总在某一定直线 l 上，若是，求出 l 的方程；若不是，请说明理由；

(III) 若 (II) 中直线 l 与 x 轴的交点为 F，点 M, N 是直线 $x=6$ 上两动点，且以 M, N 为直径的圆 E 过点 F，圆 E 是否过定点？证明你的结论.

【解析】(I) 设圆心 $C(m,n)$ 由题易得 $m=3$ 1分 半径 $r=|1-n|=\sqrt{9+n^2}$ ，

得 $n=-4$ ， $r=5$ 3分 所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

(II) 由题可得 $PT \perp CT$ ，所以 $|PT| = \sqrt{|PC|^2 - |CT|^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b+4)^2 - 25}$

$|PQ| = \sqrt{(a-2)^2 + (b+2)^2}$

所以 $\sqrt{(a-3)^2 + (b+4)^2 - 25} = \sqrt{(a-2)^2 + (b+2)^2}$ 整理得 $a-2b+4=0$

所以点 P 总在直线 $x-2y+4=0$ 上

(III) $F(-4,0)$ 由题可设点 $M(6,y_1)$ ， $N(6,y_2)$ ，

则圆心 $E(6, \frac{y_1+y_2}{2})$ ，半径 $r = \frac{|y_1-y_2|}{2}$

从而圆 E 的方程为 $(x-6)^2 + (y - \frac{y_1+y_2}{2})^2 = \frac{(y_1-y_2)^2}{4}$

整理得 $x^2 + y^2 - 12x - (y_1 + y_2)y + 36 + y_1 y_2 = 0$ 又点 F 在圆 E 上, 故 $\vec{FM} \cdot \vec{FN} = 0$ 得 $y_1 y_2 = -100$

所以 $x^2 + y^2 - 12x - (y_1 + y_2)y - 64 = 0$

令 $y = 0$ 得 $x^2 - 12x - 64 = 0$, 所以 $x = 16$ 或 $x = -4$

所以圆 E 过定点 $(16, 0)$ 和 $(-4, 0)$

18、已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点为圆 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 的圆心, 直线 $l: y = \frac{1}{2}(x - 2)$ 与 C 交于

不同的两点 A, B .

(1) 求 C 的方程;

(2) 求弦长 $|AB|$.

【不做】

19、求与 x 轴相切, 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程.

【答案】 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 或 $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

【解析】 本题主要考查求圆的标准方程的方法, 求出圆心坐标和半径的值, 是解题的关键, 属于中档题

设圆心坐标, 写出圆的方程, 然后利用圆心到直线的距离得到半径, 从而解得.

解: 设所求的方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

则圆心 (a, b) 到直线 $x - y = 0$ 的距离为 $\frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$

$\therefore r^2 = \frac{(a - b)^2}{2} + 7$, 即 $2r^2 = (a - b)^2 + 14$

由于所求圆和 x 轴相切, $\therefore r^2 = b^2$

又圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, $\therefore 3a - b = 0$

联立 (1) (2) (3) 解得 $a = 1, b = 3, r^2 = 9$ 或 $a = -1, b = -3, r^2 = 9$

故所求圆的方程是 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 或 $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$

20、已知圆 M 经过直线 $l: 2x + y + 4 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的交点, 且圆 M 的圆心到

直线 $2x + 6y - 5 = 0$ 的距离为 $3\sqrt{10}$, 求圆 M 的方程.

【答案】 $x^2 + y^2 - 20x - 15y - 43 = 0$ 或 $x^2 + y^2 + 28x + 9y + 53 = 0$

解: 设经过直线 l 与圆 C 的交点的圆系方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 + \lambda(2x + y + 4) = 0$

则 $x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x - 4y + 4\lambda + 1 = 0$

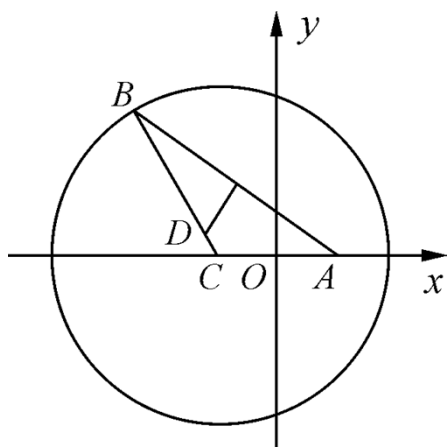
$\therefore$ 圆 M 的圆心为 $M(-\lambda - 1, \frac{4 - \lambda}{2})$

由条件可得 $\frac{|-2\lambda - 2 + 3(4 - \lambda) - 5|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = 3\sqrt{10}$

解得 $\lambda = -11$ 或 $\lambda = 13$

所以所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 20x - 15y - 43 = 0$ 或 $x^2 + y^2 + 28x + 9y + 53 = 0$.

21、如图所示，已知圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$ ， $A(1,0)$ 为定点， B 为圆 C 上的动点，线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D ，点 D 的轨迹为曲线 E 。



(I) 求曲线 E 的方程；

(II) 过点 $P(0,2)$ 作直线 l 交曲线 E 于 M, N 两点，设线段 MN 的中垂线交 y 轴于点 $Q(0, m)$ ，求实数 m 的取值范围。

【答案】(I) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ；(II) $(-\frac{1}{2}, 0]$ 。

【解析】本试题主要是考查了直线与椭圆的位置关系的运用，以及椭圆方程的求解的综合运用。

(1) 因为由题意知， $|BD| = |AD|$ 。

又 $|BD| + |CD| = 2\sqrt{2}$, $|CD| + |AD| = 2\sqrt{2} > 2$,

所以动点 D 的轨迹是以点 $A(1,0)$ 、 $C(-1,0)$ 为焦点的椭圆

(2) 根据已知条件设出直线方程，对于斜率要分类讨论是否存在，然后结合直线方程与椭圆方程联立方程组，结合韦达定理和中点公式得到中垂线方程求解。

解：(I) 由题意知， $|BD| = |AD|$ 。

又 $|BD| + |CD| = 2\sqrt{2}$, $|CD| + |AD| = 2\sqrt{2} > 2$,

所以动点 D 的轨迹是以点 $A(1,0)$ 、 $C(-1,0)$ 为焦点的椭圆，且椭圆的长轴长 $2a = 2\sqrt{2}$ ，

焦距 $2c = 2$ 。 $a = \sqrt{2}$, $c = 1$, $b = 1$,

所以曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(II) ①当 l 的斜率不存在时，线段 MN 的中垂线为 x 轴， $m = 0$ ；

②当 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y = kx + 2$ ($k \neq 0$)，代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得：

$$(\frac{1}{2} + k^2)x^2 + 4kx + 3 = 0, \text{ 由 } \Delta > 0 \text{ 得, } k^2 > \frac{3}{2}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-4k}{\frac{1}{2} + k^2}, \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4k}{1 + 2k^2},$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{kx_1 + 2 + kx_2 + 2}{2} = \frac{2}{2k^2 + 1},$$

$$\text{所以线段 } MN \text{ 的中点为 } (\frac{-4k}{1 + 2k^2}, \frac{2}{2k^2 + 1}), \text{ 中垂线方程为 } y - \frac{2}{2k^2 + 1} = -\frac{1}{k}(x - \frac{-4k}{1 + 2k^2}),$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } y = \frac{-2}{2k^2 + 1} = m. \text{ 由 } k^2 > \frac{3}{2}, \text{ 易得 } -\frac{1}{2} < m < 0.$$

$$\text{综上所述, 实数 } m \text{ 的取值范围是 } (-\frac{1}{2}, 0].$$

22、在直角坐标系 xOy 中, 动点 P 与定点 $F(1,0)$ 的距离和它到定直线 $x = 2$ 的距离之比是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

设动点 P 的轨迹为 C_1 , Q 是动圆 $C_2: x^2 + y^2 = r^2 (1 < r < 2)$ 上一点.

(1) 求动点 P 的轨迹 C_1 的方程;

(2) 设曲线 C_1 上的三点 $A(x_1, y_1), B(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), C(x_2, y_2)$ 与点 F 的距离成等差数列, 若线段 AC 的垂

直平分线与 x 轴的交点为 T , 求直线 BT 的斜率 k ;

(3) 若直线 PQ 与 C_1 和动圆 C_2 均只有一个公共点, 求 P 、 Q 两点的距离 $|PQ|$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$; (2) $k_{TB} = \sqrt{2}$; (3) $\sqrt{2} - 1$.

【解析】本试题主要考查了轨迹方程的求解和椭圆的定义, 以及直线与椭圆的位置关系的综合运用.

$$\text{解 (1) 由已知, 得 } \frac{|\sqrt{(x-1)^2 + y^2}|}{|2-x|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{将两边平方, 并化简得 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

$$\text{故轨迹 } C_1 \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 由已知可得 } |AF| = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x_1), |BF| = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-1), |CF| = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x_2),$$

因为 $2|BF|=|AF|=|CF|$ ，所以 $2[\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x_1)]=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x_1)$

即得 $x_2+x_1=2$ ，①

故线段 AC 的中点为 $(1, \frac{y_1+y_2}{2})$ ，其垂直平分线方程为 $y-\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-1)$ ，②

因为 A, C 在椭圆上，故有 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$ ， $\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$ ，两式相减，

得： $\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}+y_1^2-y_2^2=0$ ③

将①代入③，化简得 $y_1+y_2=\frac{2(y_1+y_2)}{x_1+x_2}$ ，④

将④代入②，并令 $y=0$ 得， $x=\frac{1}{2}$ ，即 T 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ 。

所以 $k_{TB}=\sqrt{2}$ 。

设 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ，直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$

因为 P 既在椭圆 C 上又在直线 PQ 上，从而有 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

将 (1) 代入 (2) 得 $(2k^2+1)x^2+2kmx+2(m^2-1)=0$

由于直线 PQ 与椭圆 C_1 相切，故 $\Delta=0$

从而可得 $m^2=1+2k^2$ ， $x_1=-\frac{2k}{m}$ (3)

同理，由 Q 既在圆 C_2 上又在直线 PQ 上，可得

$m^2=r^2(1+k^2)$ ， $x_2=-\frac{kr^2}{r^2-1}$ (4)

由 (3)、(4) 得 $k^2=2-r^2$ ，

所以 $|PQ|^2=\frac{(2-r^2)(1-r^2)}{r^2}=3-r^2-\frac{2}{r^2}\leq 3-2\sqrt{2}$

即 $|PQ|\leq\sqrt{2}-1$ ，当且仅当 $r^2=2$ 时取等号，

故 P, Q 两点的距离 $|PQ|$ 的最大值 $\sqrt{2}-1$ 。

23、已知圆 $M: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ 及定点 $N(1,0)$ ，点 P 是圆 M 上的动点，点 Q 在 NP 上，点 G

在 MP 上，且满足 $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{NQ}$ ， $\overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ 。

(1) 若 $m = -1, n = 0, r = 4$ ，求点 G 的轨迹 C 的方程；

(2) 若动圆 M 和 (1) 中所求轨迹 C 相交于不同两点 A, B ，是否存在一组正实数 m, n, r ，使得直线 MN 垂直平分线段 AB ？若存在，求出这组正实数；若不存在，说明理由。

【答案】解：(1) $\frac{\overrightarrow{NP}}{NP} = \frac{2\overrightarrow{NQ}}{NQ}$, $\therefore$

所以点 Q 为 PN 的中点，

又 $\overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$,

$\therefore GQ \perp PN$ 或 G 点与 Q 点重合。

所以 $|PG| = |GN|$ 。

又 $|GM| + |GN| = |GM| + |GP| = |PM| = 4$ 。

所以点 G 的轨迹是以 M, N 为焦点的椭圆，

且 $a = 2, c = 1$,

所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$, $\therefore G$

所以 G 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 解：不存在这样一组正实数，

下面证明：

由题意，若存在这样的一组正实数，

当直线 MN 的斜率存在时，设之为 k ，

故直线 MN 的方程为： $y = k(x-1)$ ，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， AB 中点 $D(x_0, y_0)$ ，

$$\square \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 两式相减得:}$$

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{3} = 0.$$

注意到 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{k}$,

$$\text{且} \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases},$$

$$\text{则} \frac{3x_0}{4y_0} = \frac{1}{k}, \quad \textcircled{2}$$

又点 D 在直线 MN 上,

$$\therefore y_0 = k(x_0 - 1),$$

代入②式得: $x_0 = 4$.

因为弦 AB 的中点 D 在(1)所给椭圆 C 内,

$$\text{故} -2 < x_0 < 2,$$

这与 $x_0 = 4$ 矛盾,

所以所求这组正实数不存在.

当直线 MN 的斜率不存在时,

直线 MN 的方程为 $x = 1$,

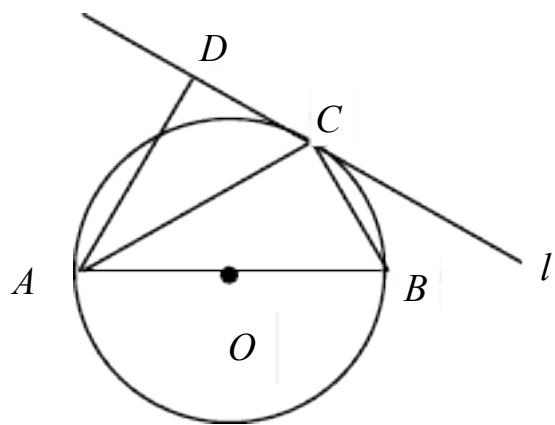
$$\text{则此时} y_1 = y_2, x_1 + x_2 = 2,$$

$$\text{代入①式得} x_1 - x_2 = 0,$$

这与 A, B 是不同两点矛盾.

综上, 所求的这组正实数不存在.

24、 如图所示, 圆 O 的直径 $AB = 6$, C 为圆周上一点, $BC = 3$, 过 C 作圆的切线 l , 过 A 作 l 的垂线 AD , 垂足为 D , 求 $\angle DAC$.



【答案】 30°

【解析】 略

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/656243055235010200>