数列存在极限的两个准则

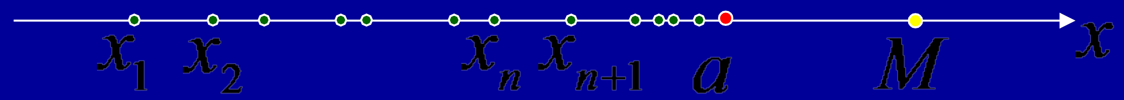
1. (准则1)夹逼准则 (P49)

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

2. (准则2)单调有界数列必有极限 (P52)

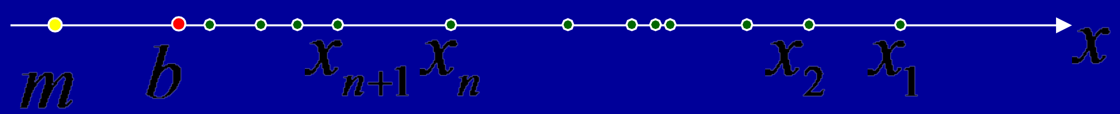
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \quad (\ge m)$$



(证明略)

例. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 . (证明见P52～P54)

另证: $x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})$

$$<[\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}]^{n+1}=[1+\frac{1}{n+1}]^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\therefore x_n=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

同理可证 $y_n=(1-\frac{1}{n})^n,(n\geq 2).$

$$x_n y_n=(1-\tfrac{1}{n^2})^n<1,(n\geq 2).$$

$x_n<\dfrac{1}{y_n}\leq\dfrac{1}{y_2}=4,(n\geq 2).$ (n=1时也成立), 有上界.

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

P37 9

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$

则 $\exists M > 0$ 及 $X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| < M.$

证: 由于 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$

对于 $\varepsilon = 1, \exists X_1 > 0,$ 当 $|x| > X_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1.$

取 $M = \mathbf{1+|A|}$ 及 $X = \mathbf{X_1}$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1+|A| = M$$

定理 4：（函数极限与数列极限的关系）

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \text{对于满足条件}\begin{cases} 1.x_n \in D_f \\ 2.x_n \to x_0 \\ 3.x_n \neq x_0 \end{cases}\text{的一切数列}\{x_n\}$$

都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$

作用:若存在两个满足条件的数列,但对应的函数列不同,则函数的极限不存在;

或若存在一种满足条件的数列,但对应的函数列的极限不存在,则函数的极限不存在.

注:本定理可推广到多个状况

§1.4 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系

一、无穷小 (除零以外的任何常数均不是无穷小!)

定义1. 若 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$
$(或 x \to \infty)$

为 $x \to x_0$ 时的无穷小． (若$x_n \to 0$,则称x_n为无穷小量.)
$(或 x \to \infty)$

例如：

$\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$，函数 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$，函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 当 $x \to -\infty$ 时为无穷小.

定理 1 . (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha,$$ 其中 α 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量 .

证: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$|f(x) - A| = |\alpha| < \varepsilon$

记 $\alpha = f(x) - A$, 即 $f(x) = A + \alpha$

$$\lim_{x \to x_0} \alpha = 0$$

对自变量的其它变化过程类似可证 .

二、 无穷大

定义2 . 若任给 $M>0$ 总存在 $\delta>0$ **(正数 X)** 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ $(|x|>X)$ 的 x, 总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \qquad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\ )$$

若在定义中将 ①式改为 $f(x)>M$ $(f(x)<-M)$,

则记作 $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ $(\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

2. 函数为无穷大 , 必然无界 . 但反之不真 !

例如, 函数 $f(x)=x\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$

取 $x_n=\frac{\pi}{2}+n\pi \longrightarrow +\infty$

但 $f(\frac{\pi}{2}+n\pi)=0 \longrightarrow 0 \neq \infty$

由归结原理(P37定理4)得

所以 $x\to+\infty$ 时 , $f(x)$ 不是无穷大 !

归结原理: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对于满足条件 $\begin{cases} 1.x_n\in D_f \\ 2.x_n\to x_0 \\ 3.x_n\neq x_0 \end{cases}$ 的一切数列$\{x_n\}$

都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

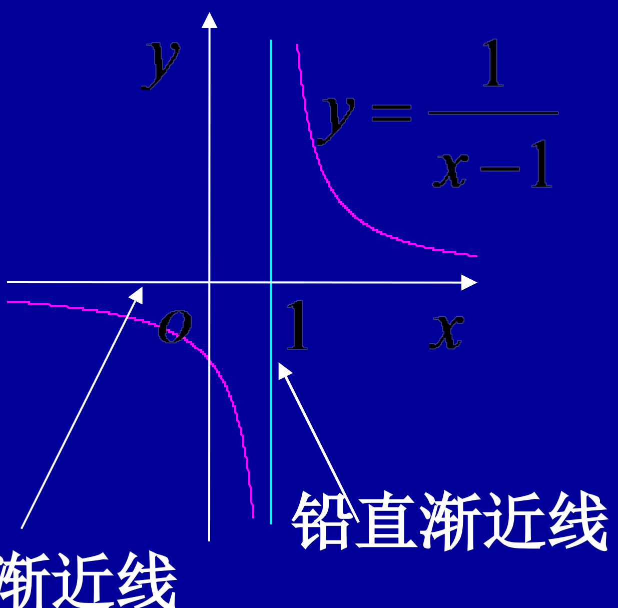
例．证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证: $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| \overset{令}{>} M$, 得 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$.

$\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

阐明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线．



水平渐近线的定义:…

斜渐近线的定义及求法(P75题13)

三、无穷小与无穷大的关系

定理2. 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(自证)

阐明: 据此定理 , 有关无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义
2. 无穷小与函数极限的关系
3. 无穷小与无穷大的关系

作业

P41 2 (1) , (2) ；7

无界性已讲
不是无穷大的证明
运用P37定理4

§1.5　极限运算法则

一 、无穷小运算法则

二、 极限的四则运算法则

三、 复合函数的极限运算法则

一、 无穷小运算法则

定理1. 有限个无穷小的和还是无穷小 .

证: 考虑两个无穷小的和 . 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,

$\forall\,\frac{\varepsilon}{2}>0$, $\exists\,\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 , 有 $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\,\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 , 有 $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0.$

这阐明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha+\beta$ 为无穷小量 .

类似可证: 有限个无穷小之和仍为无穷小 .

阐明: 无限个无穷小之和不一定是无穷小！

例如,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$$

(为什么?到§5.2便知)