

新疆阿瓦提县第四中学 2024 年高三回头联考数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

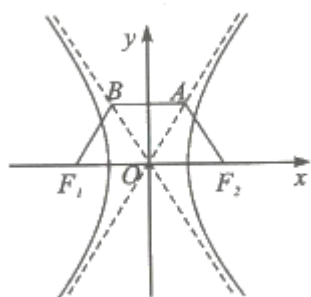
1. 五行学说是华夏民族创造的哲学思想，是华夏文明重要组成部分.古人认为，天下万物皆由金、木、水、火、土五类元素组成，如图，分别是金、木、水、火、土彼此之间存在的相生相克的关系.若从 5 类元素中任选 2 类元素，则 2 类元素相生的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 如图，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，直线 $y = \frac{bc}{2a}$ 与双曲线 C 的两

条渐近线分别相交于 A, B 两点.若 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则双曲线 C 的离心率为（ ）



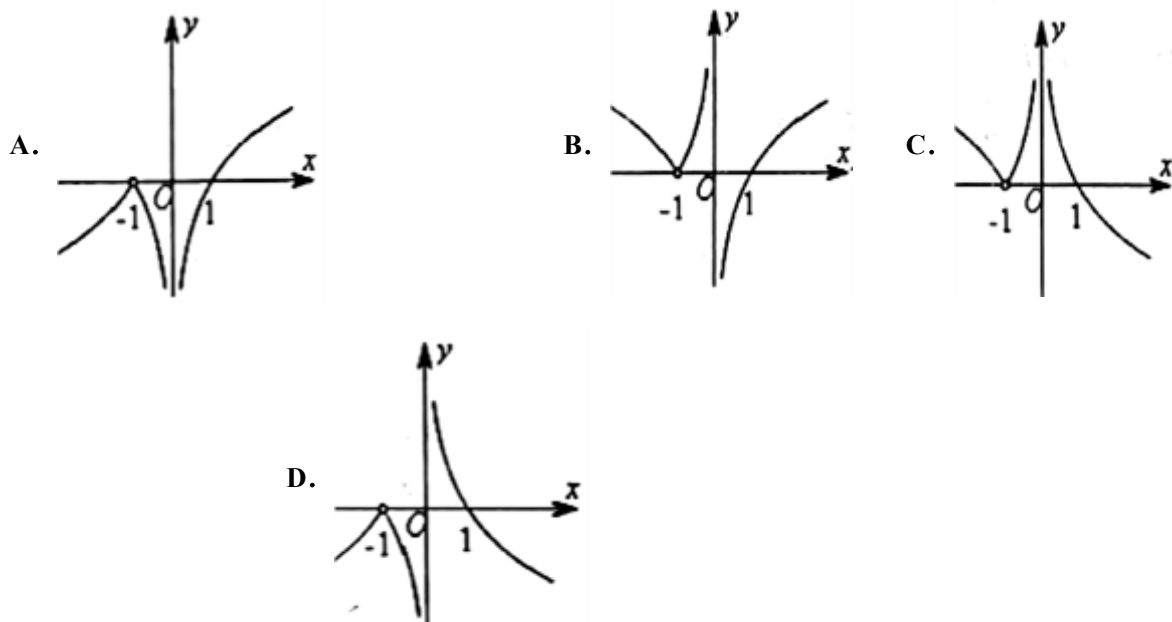
- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
- C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 有一圆柱状有盖铁皮桶（铁皮厚度忽略不计），底面直径为20 cm，高度为100 cm，现往里面装直径为10 cm 的球，在能盖住盖子的情况下，最多能装（ ）

（附： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236$ ）

- A. 22 个 B. 24 个 C. 26 个 D. 28 个

4. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是（ ）



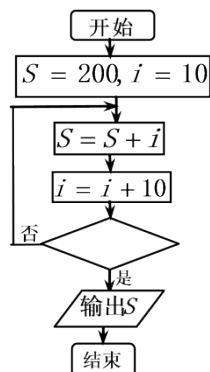
5. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(x+4) = f(x)$ ，当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = 2x^2$ ，则 $f(3) =$ （ ）

- A. -18 B. 18 C. -2 D. 2

6. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x = n^2 - 1, n \in A\}$ ， $P = A \cap B$ ，则 P 的子集共有（ ）

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

7. 运行如图所示的程序框图，若输出的值为 300，则判断框中可以填（ ）



- A. $i > 30?$ B. $i > 40?$ C. $i > 50?$ D. $i > 60?$

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ ， $g(x) = ax - \ln x$ ，若对 $\forall x \in (0, e)$ ， $\exists x_1, x_2 \in (0, e)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，使得

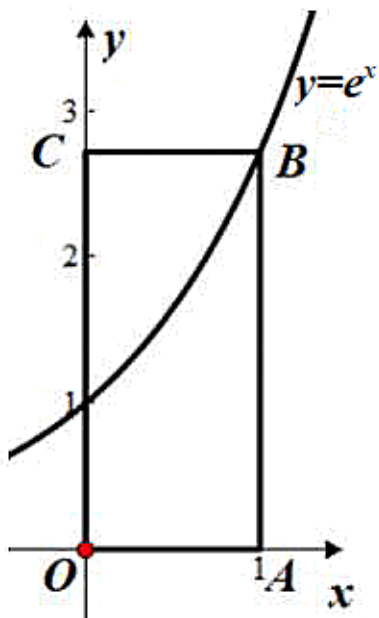
$f(x) = g(x_i) (i=1,2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{6}{e}\right)$ B. $\left[\frac{1}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup \left[\frac{6}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$ D. $\left[\frac{6}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$

9. $\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)^5$ 展开项中的常数项为

- A. 1 B. 11 C. -19 D. 51

10. 某人用随机模拟的方法估计无理数 e 的值, 做法如下: 首先在平面直角坐标系中, 过点 $A(1,0)$ 作 x 轴的垂线与曲线 $y = e^x$ 相交于点 B , 过 B 作 y 轴的垂线与 y 轴相交于点 C (如图), 然后向矩形 $OABC$ 内投入 M 粒豆子, 并统计出这些豆子在曲线 $y = e^x$ 上方的有 N 粒 ($N < M$), 则无理数 e 的估计值是 ()



- A. $\frac{N}{M-N}$ B. $\frac{M}{M-N}$ C. $\frac{M-N}{N}$ D. $\frac{M}{N}$

11. 已知复数 $z = \frac{4i}{1+i}$, 则 z 对应的点在复平面内位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 锐角 θ 顶点在坐标原点, 始边为 x 轴正半轴, 终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$, 则

$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 数学家狄里克雷对数论，数学分析和数学物理有突出贡献，是解析数论的创始人之一.函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases}, \text{ 称为狄里克雷函数. 则关于 } D(x) \text{ 有以下结论:}$$

① $D(x)$ 的值域为 $[0,1]$;

② $\forall x \in R, D(-x) = D(x)$;

③ $\forall T \in R, D(x+T) = D(x)$;

④ $D(1) + D(\sqrt{2}) + D(\sqrt{3}) + \dots + D(\sqrt{2020}) = 45$;

其中正确的结论是_____ (写出所有正确的结论的序号)

14. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, SA, SB, SC 两两垂直且 $SA = SB = SC = 2$, 点 M 为 $S-ABC$ 的外接球上任意一点, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最大值为_____.

15. 已知 $(ax+b)^6$ 的展开式中 x^4 项的系数与 x^5 项的系数分别为 135 与 -18, 则 $(ax+b)^6$ 展开式所有项系数之和为_____.

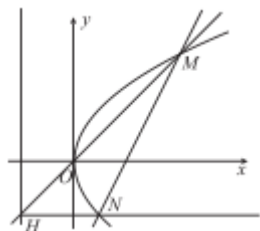
16. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $A = \{0, |x|\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$.

(1) 求 p 的值;

(2) 如图, 过原点 O 的直线 l 与抛物线 C 交于点 M , 与直线 $x = -1$ 交于点 H , 过点 H 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 N , 证明: 直线 MN 过定点.



18. (12分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 AB 的中点的横坐标;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求证: M, B, C 三点共线;

(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 求实数 λ 的取值范围.

19. (12 分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 设椭圆 Γ 的上顶点为 B , 右顶点和右焦点分别为 A, F , 且 $\angle AFB = \frac{5\pi}{6}$.

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + n (n \neq \pm 1)$ 交椭圆 Γ 于 P, Q 两点, 设直线 BP 与直线 BQ 的斜率分别为 k_{BP}, k_{BQ} , 若 $k_{BP} + k_{BQ} = -1$, 试判断直线 l 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, a \in \mathbb{R})$$
 在以坐标原点为

极点、 x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$.

(1) 若点 $A(2, 0)$ 在直线 l 上, 求直线 l 的极坐标方程;

(2) 已知 $a > 0$, 若点 P 在直线 l 上, 点 Q 在曲线 C 上, 且 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求 a 的值.

21. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0$, $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} - a_n + 3a_{n+1}a_n = 0$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln x$

(1) 求 $f(x)$ 单调区间和极值;

(2) 若存在实数 $a, b, c (0 < a < b < c)$, 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$, 求证: $c - a < 2$

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

列举出金、木、水、火、土任取两个的所有结果共 10 种，其中 2 类元素相生的结果有 5 种，再根据古典概型概率公式可得结果.

【详解】

金、木、水、火、土任取两类，共有：

金木、金水、金火、金土、木水、木火、木土、水火、水土、火土 10 种结果，

其中两类元素相生的有火木、火土、木水、水金、金土共 5 结果，

所以 2 类元素相生的概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用，属于基础题，利用古典概型概率公式求概率时，找准基本事件个数是解题的关键，基本事件的探求方法有 (1)枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的；(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.在找基本事件个数时，一定要按顺序逐个写出：先 (A_1, B_1) ， (A_1, B_2) (A_1, B_n) ，再 (A_2, B_1) ， (A_2, B_2) (A_2, B_n) 依次 (A_3, B_1) (A_3, B_2) (A_3, B_n) ... 这样才能避免多写、漏写现象的发生.

2、A

【解析】

易得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$ ，过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 T ，在 $\triangle F_1TB$ 中，利用 $\frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3}$ 即可得到 a, b, c 的方程.

【详解】

由已知，得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$ ，过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 T ，故 $F_1T = \frac{c}{2}$ ，

又 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，即 $\frac{\frac{bc}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，

所以双曲线 C 的离心率 $e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = 2$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率问题，在作双曲线离心率问题时，最关键的是找到 a, b, c 的方程或不等式，本题属于容易题.

3、C

【解析】

计算球心连线形成的正四面体相对棱的距离为 $5\sqrt{2}$ cm, 得到最上层球面上的点距离桶底最远为 $(10 + 5\sqrt{2}(n-1))$ cm, 得到不等式 $10 + 5\sqrt{2}(n-1) \leq 100$, 计算得到答案.

【详解】

由题意, 若要装更多的球, 需要让球和铁皮桶侧面相切, 且相邻四个球两两相切, 这样, 相邻的四个球的球心连线构成棱长为 10 cm 的正四面体,

易求正四面体相对棱的距离为 $5\sqrt{2}$ cm, 每装两个球称为“一层”, 这样装 n 层球,

则最上层球面上的点距离桶底最远为 $(10 + 5\sqrt{2}(n-1))$ cm,

若想要盖上盖子, 则需要满足 $10 + 5\sqrt{2}(n-1) \leq 100$, 解得 $n \leq 1 + 9\sqrt{2} \approx 13.726$,

所以最多可以装 13 层球, 即最多可以装 26 个球.

故选: C

【点睛】

本题考查了圆柱和球的综合问题, 意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

4、C

【解析】

对 x 分类讨论, 去掉绝对值, 即可作出图象.

【详解】

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x| = \begin{cases} -\log_a(-x), & x < -1, \\ \log_a(-x), & -1 < x < 0, \\ \log_a x, & x > 0. \end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法: 通过对问题进行定性的分析, 从而得出图象的上升(或下降)的趋势, 利用这一特征分析解决问题;

(2)定量计算法: 通过定量的计算来分析解决问题;

(3)函数模型法: 由所提供的图象特征, 联想相关函数模型, 利用这一函数模型来分析解决问题.

5、C

【解析】

由题设条件 $f(x+4) = f(x)$, 可得函数的周期是 4, 再结合函数是奇函数的性质将 $f(3)$ 转化为 $f(1)$ 函数值, 即可

得到结论.

【详解】

由题意, $f(x+4)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的周期是 4,

所以, $f(3)=f(3-4)=f(-1)$,

又函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数, 且当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x)=2x^2$,

所以, $f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数的周期性, 由题设得函数的周期是解答本题的关键, 属于基础题.

6、B

【解析】

根据集合 A 中的元素, 可得集合 B , 然后根据交集的概念, 可得 P , 最后根据子集的概念, 利用 2^n 计算, 可得结果.

【详解】

由题可知: $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{x|x=n^2-1, n \in A\}$

当 $n=0$ 时, $x=-1$

当 $n=1$ 时, $x=0$

当 $n=2$ 时, $x=3$

当 $n=3$ 时, $x=8$

所以集合 $B=\{x|x=n^2-1, n \in A\}=\{-1,0,3,8\}$

则 $P=A \cap B=\{0,3\}$

所以 P 的子集共有 $2^2=4$

故选: B

【点睛】

本题考查集合的运算以及集合子集个数的计算, 当集合 P 中有 n 元素时, 集合 P 子集的个数为 2^n , 真子集个数为 2^n-1 , 非空子集为 2^n-1 , 非空真子集为 2^n-2 , 属基础题.

7、B

【解析】

由 $300=200+10+20+30+40$, 则输出为 300, 即可得出判断框的答案

【详解】

由 $300 = 200 + 10 + 20 + 30 + 40$ ，则输出的值为 **300**， $i = 40 + 10 = 50$ ，故判断框中应填 $i > 40$ ？

故选：B.

【点睛】

本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

8、D

【解析】

先求出 $f(x)$ 的值域，再利用导数讨论函数 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上的单调性，结合函数值域，由方程有两个根求参数范围即可.

【详解】

因为 $g(x) = ax - \ln x$ ，故 $g'(x) = \frac{ax-1}{x}$ ，

当 $a \leq 0$ 时， $g'(x) < 0$ ，故 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递减；

当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $g'(x) > 0$ ，故 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增；

当 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时，令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{a}$ ，

故 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{a}, e\right)$ 上单调递增.

又 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$ ， $g(e) = \frac{a}{e} - 1$ ，且当 x 趋近于零时， $g(x)$ 趋近于正无穷；

对函数 $f(x)$ ，当 $x \in (0, e)$ 时， $f(x) \in \left[\frac{11}{4}, 5\right)$ ；

根据题意，对 $\forall x \in (0, e)$ ， $\exists x_1, x_2 \in (0, e)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，使得 $f(x) = g(x_i) (i = 1, 2)$ 成立，

只需 $g\left(\frac{1}{a}\right) < \frac{11}{4}$ ， $g(e) \geq 5$ ，

即可得 $1 + \ln a < \frac{11}{4}$ ， $\frac{a}{e} - 1 \geq 5$ ，

解得 $a \in \left[\frac{6}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$.

故选：D.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/657006015161010003>