雅礼中学2024届高三综合自主测试（一）

数 学 试 卷

命题人：　　　　审题人

注意事项：

1. 答卷前，考生务将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．一组数据按从小到大的顺序排列为2，4，m，12，16，17，若该组数据的中位数是极差的$\dfrac{3}{5}$，则该组数据的第40百分位数是

A．4　　B．5　　C．6　　D．9

2．圆心在y轴上，半径为1，且过点$(1,2)$的圆的方程是

A．$x^2+(y-2)^2=1$　　B．$x^2+(y+2)^2=1$

C．$(x-1)^2+(y-3)^2=1$　　D．$x^2+(y-3)^2=1$

3．记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_7=10, a_5a_6=35$，则$S_6=$

A．20　　B．16　　C．14　　D．12

4．若古典概型的样本空间$\Omega=\{1,2,3,4\}$，事件$A=\{1,2\}$，甲：事件$B=\Omega$，乙：事件A,B相互独立，则甲是乙的

A．充分不必要条件

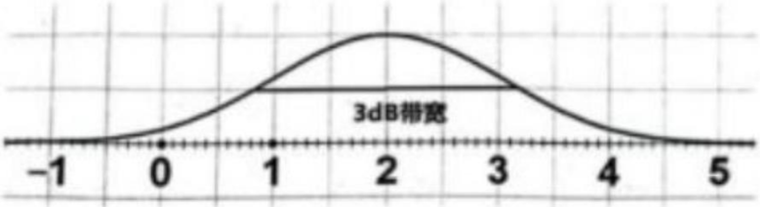
B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

5．一般来说，输出信号功率用高斯函数来描述，定义为$I(x)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，其中$I_0$为输出信号功率最大值（单位：mW），$x$为频率（单位：Hz），$\mu$为输出信号功率的数学

期望，σ^2 为输出信号的方差，3dB 带宽是光通信中一个常用的指标，是指当输出信号功率下降至最大值一半时，信号的频率范围，即对应函数图象的宽度。现已知输出信号功率为 $I(x)=I_0e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$（如图所示），则其 3dB 带宽为



A. $\sqrt{\ln 2}$　　B. $4\sqrt{\ln 2}$　　C. $3\sqrt{\ln 2}$　　D. $2\sqrt{2\ln 2}$

6．已知函数 $y=f(x)$ 的图象恰为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ x 轴上方的部分，若 $f(s-t)$，$f(s)$，$f(s+t)$ 成等比数列，则平面上点（s，t）的轨迹是

A. 线段（不包含端点）
B. 椭圆一部分
C. 双曲线一部分
D. 线段（不包含端点）和双曲线一部分

7．已知 $\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}-\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[1+\tan(\alpha-\beta)\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right]=6$，$\tan\alpha\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=3$，则 $\cos(4\alpha+4\beta)=$

A. $-\dfrac{79}{81}$　　B. $\dfrac{79}{81}$　　C. $-\dfrac{49}{81}$　　D. $\dfrac{49}{81}$

8．方程 $2\cos 2x\left(\cos 2x-\cos\left(\dfrac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos 4x-1$ 所有正根的和为

A. 810π　　B. 1008π　　C. 1080π　　D. 1800π

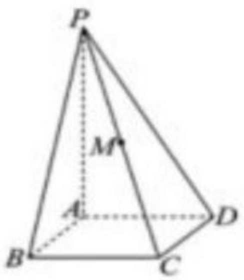
二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9．已知复数 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2+bx+1=0(-2<b<2,b\in\mathbf{R})$ 的两根，则下列说法中正确的是

A. $\overline{z_1}=z_2$　　B. $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbf{R}$

C. $|z_1|=|z_2|=1$　　D. 若 $b=1$，则 $z_1^3=z_2^3=1$

10．四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，PA 与底面垂直，$|PA|=2$，$|AB|=1$，动点 M 在线段 PC 上，则



A. 不存在点 M，使得 $AC\perp BM$

B. $MB+MD$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

C. 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为 5π

D. 点 M 到直线 AB 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 设 a 为常数，$f(0)=\dfrac{1}{2}, f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$，则

A. $f(a)=\dfrac{1}{2}$

B. $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 成立

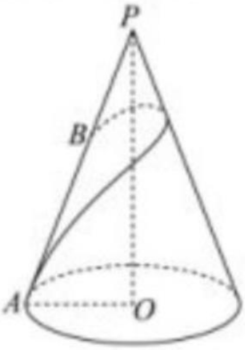
C. $f(x+y)=2f(x)f(y)$

D. 满足条件的 $f(x)$ 不止一个

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. $\left(2+\dfrac{x}{y}\right)(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为_________. （用数字作答）

13. 如图，圆锥底面半径为 $\dfrac{2}{3}$，母线 $PA=2$，点 B 为 PA 的中点，一只蚂蚁从 A 点出发，沿圆锥侧面绕行一周，到达 B 点，其最短路线长度为________，其中下坡路段长为________.



14. 设严格递增的整数数列 a_1，a_2，…，a_{20} 满足 $a_1=1$，$a_{20}=40$. 设 f 为 a_1+a_2，a_2+a_3，…，$a_{19}+a_{20}$ 这 19 个数中被 3 整除的项的个数，则 f 的最大值为________，使得 f 取到最大值的数列 $\{a_n\}$ 的个数为________.

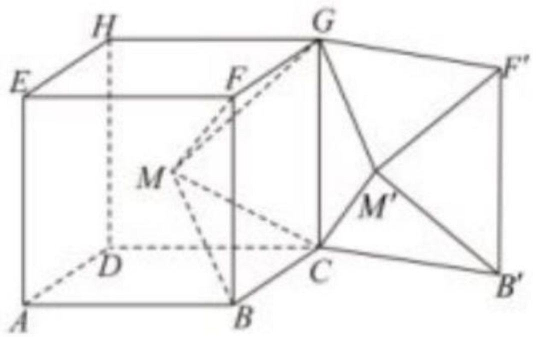
四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15. （13 分）已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为$F(0,1)$，过点F的直线l与C交于A,B两点，过A,B作C的切线l_1,l_2，交于点M，且l_1,l_2与x轴分别交于点D,E.

（1）求证：$|DE|=|MF|$；

（2）设点P是C上异于A,B的一点，P到直线l_1,l_2,l的距离分别为d_1,d_2,d，求$\dfrac{d_1d_2}{d^2}$的最小值.

16. （15 分）如图，在棱长为2的正方体$ABCD-EFGH$中，点M是正方体的中心，将四棱锥$M-BCGF$绕直线CG逆时针旋转$\alpha(0<\alpha<\pi)$后，得到四棱锥$M'-B'CGF'$.



（1）若$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，求证：平面$MBF\perp$平面$M'B'F'$；

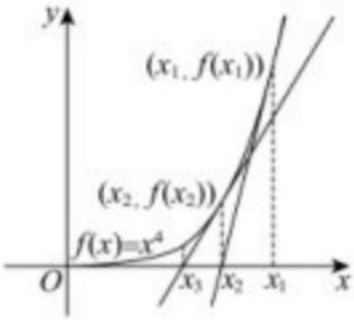
（2）是否存在α，使得直线$M'F'\perp$平面MBC，若存在，求出α的值；若不存在，请说明理由.

17. （15 分）已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$（其中 a,b 为常数且 $a\neq 0$）在 $x=1$ 处取得极值.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极大值点和极小值点；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上的最大值为 1，求 a 的值.

18. （17 分）物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出了“牛顿数列”，它在航空航天中应用非常广泛. 其定义是：对于函数 $f(x)$，若满足 $(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列. 已知 $f(x)=x^4$，如图，在横坐标为 $x_1=1$ 的点处作 $f(x)$ 的切线，切线与 x 轴交点的横坐标为 x_2，用 x_2 代替 x_1 重复上述过程得到 x_3，一直下去，得到数列 $\{x_n\}$.



（1）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{n\cdot x_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $S_n\geq 16-\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^n$，求整数 λ 的最小值.（参考数据：$0.9^4=0.6561$，$0.9^5\approx 0.5905$，$0.9^6\approx 0.5314$，$0.9^7\approx 0.4783$）

19．（17分）若函数$y=f(x)$满足$f(x)=f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$且$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$（$x\in\mathbf{R}$），则称函数$y=f(x)$为"$M$函数"．

（1）试判断$y=\sin\frac{4}{3}x$是否为"M函数"，并说明理由；

（2）函数$f(x)$为"M函数"，且当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$时，$y=\sin x$，求$y=f(x)$的解析式，并写出在$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上的单调增区间；

（3）在（2）条件下，当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，关于$x$的方程$f(x)=a$（$a$为常数）有解，记该方程所有解的和为S，求S．

雅礼中学2024届高三综合自主测试（一）

数学参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分）

1、C【解析】根据题意，数据按从小到大的顺序排列为2，4，m，12，16，17，

则极差为$17-2=15$，故该组数据的中位数是$15\times\frac{3}{5}=9$，数据共6个，

故中位数为$\frac{m+12}{2}=9$，解得$m=6$，因为$6\times 40\%=2.4$，

所以该组数据的第40百分位数是第3个数6，故选：C.

2、A【解析】因为圆心在y轴上，所以可设所求圆的圆心坐标为$\left(0,b\right)$，

则圆的方程为$x^2+(y-b)^2=1$，又点$\left(1,2\right)$在圆上，所以$1+\left(2-b\right)^2=1$，解得$b=2$，

所以所求圆的方程为$x^2+\left(y-2\right)^2=1$．故选：A.

3、D【解析】$\because\{a_n\}$是等差数列，$\therefore a_3+a_7=2a_5=10$，$a_5=5$，

所以$a_6=\frac{a_5a_6}{a_5}=7$，$\therefore$公差$d=a_6-a_5=2$，$\therefore a_1=a_5-4d=-3$，

$\therefore S_6=6\times(-3)+\frac{6\times 5}{2}\times 2=12$，故选：D.

4、A【解析】若$B=\Omega$，$A\cap B=\left\{1,2\right\}$，则$P\left(A\cap B\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

而$P\left(A\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P\left(B\right)=1$，所以$P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)$，

所以事件A,B相互独立，反过来，当$B=\left\{1,3\right\}$，$A\cap B=\left\{1\right\}$，

此时$P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}$，$P\left(A\right)=P\left(B\right)=\frac{1}{2}$，满足$P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)$，

事件A,B相互独立，所以不一定$B=\Omega$，

所以甲是乙的充分不必要条件. 故选：A

5、D【解析】依题意，由$I(x)=\frac{1}{2}I_0$，$I(x)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$，得$I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}=\frac{1}{2}I_0$，

即$\mathrm{e}^{\frac{(x-2)^2}{2}}=2$，

则有$(x-2)^2=2\ln 2$，解得$x_1=2-\sqrt{2\ln 2}$，$x_2=2+\sqrt{2\ln 2}$，

所以3dB带宽为$x_2-x_1=2\sqrt{2\ln 2}$. 故选：D

6、A【解析】因为函数$y=f(x)$的图象恰为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ x轴上方的部分，

所以$y=f(x)=b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}(-a<x<a)$，因为$f(s-t)$，$f(s)$，$f(s+t)$成等比数列，

所以有$f^2(s)=f(s-t)\cdot f(s+t)$，且有$-a<s<a,-a<s-t<a,-a<s+t<a$成立，

即$-a<s<a,-a<t<a$成立，

由$f^2(s)=f(s-t)\cdot f(s+t)\Rightarrow(b\cdot\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}})^2=b\cdot\sqrt{1-\frac{(s-t)^2}{a^2}}\cdot b\cdot\sqrt{1-\frac{(s+t)^2}{a^2}}$，

化简得：$t^4=2a^2t^2+2s^2t^2\Rightarrow t^2(t^2-2a^2-2s^2)=0\Rightarrow t^2=0$，或$t^2-2a^2-2s^2=0$，

当$t^2=0$时，即$t=0$，因为$-a<s<a$，

所以平面上点（s，t）的轨迹是线段（不包含端点）；

当$t^2-2a^2-2s^2=0$时，即$t^2=2a^2+2s^2$，

因为$-a<t<a$，所以$t^2<a^2$，而$2a^2+2s^2>a^2$，

所以$t^2=2a^2+2s^2$不成立，故选：A

7、A【解析】$\left(\frac{1}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[1+\tan(\alpha-\beta)\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=6\ \frac{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(1+\frac{2\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6$.

$\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\frac{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}+2\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6$，$\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\frac{1+\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=6$，

$\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\times\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}=6$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，

又因为$\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=3$，所以$\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$，

则$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6},\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$ $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

$\cos(4\alpha+4\beta)=2\cos^2(2\alpha+2\beta)-1=2\times\frac{1}{81}-1=-\frac{79}{81}$. 故选：A

8、C【解析】$2\cos 2x\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos 4x-1=2\cos^2 2x-2$，

令$a=\cos 2x,b=\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)$，则$2a(a-b)=2a^2-2$，即$ab=1$，

所以$a=1,b=1$或$a=-1,b=-1$，

当 $a=1,b=1$ 时，即 $\cos2x=1,\cos\left(\dfrac{2014\pi^2}{x}\right)=1$，

所以 $x=k\pi,k\in Z,x=\dfrac{1007\pi}{k_1},k_1\in Z$，

因为 $1007=1\times19\times53$，所以 $x=\pi,19\pi,53\pi,1007\pi$，

当 $a=-1,b=-1$ 时，即 $\cos2x=-1,\cos\left(\dfrac{2014\pi^2}{x}\right)=-1$，

则 $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2},k\in Z,x=\dfrac{2014\pi^2}{\dfrac{(2k_1+1)\pi}{2}}=\dfrac{4028\pi}{2k_1+1},k_1\in Z$，

因为 $2k+1$ 是奇数，所以 $\dfrac{4028}{2k_1+1}$ 也是奇数，不成立；

所以方程所有正根的和为：$\pi+19\pi+53\pi+1007\pi=1080\pi$，故选：C

二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

9、ACD【解析】$\Delta=b^2-4<0$，$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{4-b^2}\mathrm{i}}{2}$，

不妨设 $z_1=-\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，$\overline{z_1}=z_2$，A 正确；

$|z_1|=|z_2|=\sqrt{(-\dfrac{b}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2})^2}=1$，C 正确；

$z_1z_2=1$，$\therefore \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1^2}{z_1z_2}=z_1^2=\dfrac{b^2-2}{2}-\dfrac{b\sqrt{4-b^2}}{2}\mathrm{i}$，$b\neq0$ 时，$\dfrac{z_1}{z_2}\notin R$，B 错；

$b=1$ 时，$z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}\mathrm{i}$，计算得 $z_1^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}\mathrm{i}=z_2=\overline{z_1}$，

$z_2^2=z_1=\overline{z_2}$，$z_1^3=z_1z_2=1$，同理 $z_2^3=1$，D 正确．

故选：ACD．

10、BD【解析】对于 A：连接 BD，且 $AC\cap BD=O$，如图所示，当 M 在 PC 中点时，