

专题 11.26 《三角形》全章复习与巩固（知识讲解）

【知识点一】三角形的分类

(1) 按角分	锐角三角形	(2) 按边分	不等边三角形
	直角三角形		等腰三角形
	钝角三角形		$\begin{cases} \text{腰和底边不相等的等腰三角形;} \\ \text{等边三角形} \end{cases}$

【知识点二】三角形三边关系

- (1) 三角形三边的关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边；
- (2) 已知两边求第三边的范围：两边之差 $<$ 第三边 $<$ 两边之和。

【知识点三】三角形的高

- (1) 锐角三角形的三条高都在三角形内，它们在三角形内交于一点；
- (2) 直角三角形的一条高在三角形内，另外两条高就是两条直角边，三条高在直角顶点相交；
- (3) 钝角三角形有一条高在三角形内，还有两条高在三角形外，三条高延长后在三角形外交于一点。

【知识点四】三角形的中线

- (1) 三角形的三条中线在三角形内交于一点（重心）；
- (2) 三角形的一条中线将这个三角形分成面积相等的两个三角形。

【知识点五】三角形的角平分线

三角形的三条角平分线在三角形内交于一点（内心）

【知识点六】三角形的角平分线

三角形的内角和等于 180° ，外角和等于 360°

【知识点七】直角三角形

- (1) 直角三角形的两个锐角互余。
- (2) 有两个角互余的三角形是直角三角形；
- (3) 有两个角的和等于第三个角的三角形是直角三角形；
- (4) 有两个角的差等于第三个角的三角形是直角三角形。

【知识点八】三角形的外角的性质

- (1) 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和。
- (2) 三角形的外角大于与它不相邻的任意一个内角。

【知识点九】三角形角平分线的有关结论：

- (1) 三角形两个内角的角平分线相交所成的钝角等于 90° 加上第三个角的一半。
- (2) 三角形两个外角的角平分线相交所成的锐角等于 90° 减去第三个角的一半。
- (3) 三角形一个内角和一个外角的角平分线相交所成的锐角等于第三个角的一半。

【知识点十】多边形

(1) 从 n 边形的一个顶点出发,可以引 $(n-3)$ 条对角线,它将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形. n 边形的对角线公式是: $\frac{n(n-3)}{2}$

- (2) n 边形的内角和等于 $(n-2) \times 180^\circ$, 多边形的外角和等于 360° 。

【知识点十一】正多边形

- (1) 正多边形的每个内角等于 $\frac{(n-2) \times 180}{n}$, 每个外角等于 $\frac{360}{n}$ 。
- (2) 三角形的内角和是外角和的一半, 四边形的内角和与外角和相等, 六边形的内角和是外角和的 2 倍。
- (3) 求多边形的内角和时, 如果少加了一个角, 那么少加的角等于 180° 减去余数; 如果多加了一个角, 那么多加的角就是余数。

【典型例题】

类型一、三角形概念及分类

例

1. 下面几个定义是否正确, 如果不正确, 请你正确的定义:

(1) 三条线段首尾相接组成的图形叫三角形; (2) 多边形所有外角的和叫多边形的外角和

【答案】(1) 不正确, 见分析; (2) 不正确, 见分析.

解: (1) 不正确, 由不在同一直线上的三条线段首尾相接所组成的图形叫三角形;
(2) 不正确, 在多边形的每个顶点处取一个外角, 它们的和叫这个多边形的外角和.

【点拨】正确理解题意是解题的关键.

举一反三:

【变式 1】已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c . 若 a, b, c 满足 $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【答案】 $\triangle ABC$ 的形状是等边三角形.

【分析】利用平方数的非负性, 求解 a, b, c 的关系, 进而判断 $\triangle ABC$.

解：∵ $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$,

$$\therefore a-b=0, \quad b-c=0$$

$$\therefore a=b=c,$$

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

【点拨】本题主要是考查了三角形的分类，熟练掌握各类三角形的特点，例如三边相等为等边三角形，含 90° 的三角形为直角三角形等，这是解决此类题的关键.

【变式 2】满足下列条件的三角形是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形.

(1) $\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $\angle C=\angle B$;

(2) 三个内角的度数之比为 1:2:3.

【答案】(1)锐角三角形；(2)直角三角形.

【分析】根据角的分类对三角形进行分类即可.

解：(1) ∵ $\angle A=30^\circ$ ， $\angle C=\angle B$ ， $\angle A+\angle C+\angle B=180^\circ$ ，∴ $\angle C=\angle B=75^\circ$ ，

∴ 满足条件的三角形是锐角三角形.

(2) ∵ 三个内角的度数之比为 1:2:3，∴ 可求得每个内角的度数分别为 30° ， 60° ， 90° ，

∴ 满足条件的三角形是直角三角形.

【点拨】本题主要考查了三角形的分类问题.

类型二、三角形中线、高线和角平分线

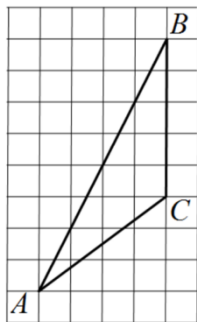
例

2. 如图，在 6×10 的网格中，每一小格均为正方形且边长是 1，已知 $\triangle ABC$ 的每个顶点都在格点上.

(1) 画出 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高线 AE ;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中 AB 边上取点 D ，连接 CD ，使 $S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle ACD}$;

(3) 直接写出 $\triangle BCD$ 的面积是_____.



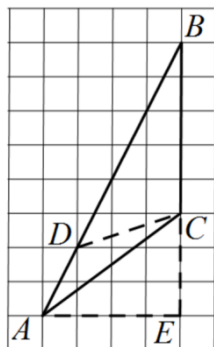
【答案】(1)画图见分析(2)画图见分析(3) 7.5

【分析】

- (1) 利用网格线过 A 作 BC 的垂线即可；
- (2) 利用网格线的特点，取格点 D ，满足 $BD=3AD$ ，则 D 即为所求作的点；
- (3) 利用三角形的面积公式直接计算即可.

(1)解：如图， AE 即为 BC 上的高.

(2)如图，利用网格特点，可得 $BD=3AD$ ，



$\therefore D$ 即为所求作的点，满足 $S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle ACD}$.

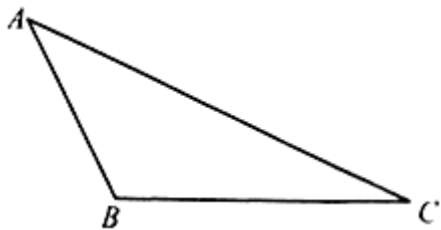
$$(3) S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.5.$$

【点拨】 本题考查的是画三角形的高，三角形的面积的计算，熟悉等高的两个三角形的面积之间的关系是解本题的关键.

举一反三：

【变式 1】 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=15$ ， $BC=20$

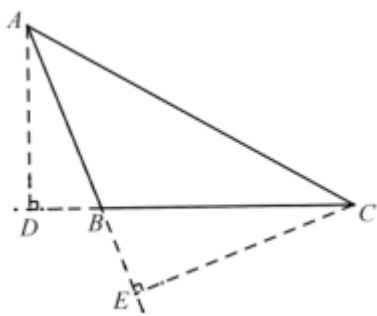
- (1) 画出 $\triangle ABC$ 的高 AD 和 CE ；
- (2) 若 $AD=5$ ，求 CE 的长.



【答案】 (1) 见分析； (2) $\frac{20}{3}$

【分析】 (1) 根据三角形高的定义画图； (2) 利用面积法进行计算，即可得到答案；

解：(1) 如图：



$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} CE \cdot AB,$$

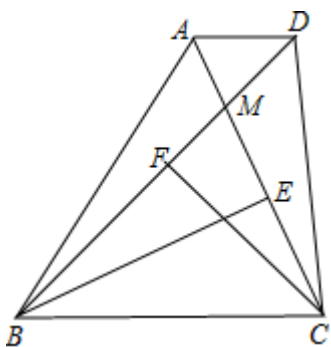
$$\therefore CE = \frac{20 \times 5}{15} = \frac{20}{3};$$

【点拨】本题考查了作图-基本作图，熟练掌握基本作图是解决问题的关键，也考查了三角形的面积.

【变式 2】如图，已知 $AD \parallel BC$.

(1) 找出图中所有面积相等的三角形，并选择其中一对说明理由.

(2) 如果 $BE \perp AC$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E 、 F , $\frac{AC}{BD} = \frac{3}{4}$, 求 $\frac{BE}{CF}$ 的值. (直接写出答案)



【答案】(1)理由见分析；(2) $\frac{BE}{CF} = \frac{4}{3}$

【分析】

(1) 根据等底等高的三角形的面积相等解答，以及等式的性质进行解答即可.

(2) 利用 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的面积列式整理即可得解.

(1)解：① $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ ，② $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ ，③ $\triangle AMB$ 与 $\triangle DMC$ ；

选择①说明：设 AD 、 BC 间的距离为 h ,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h, \quad S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot h,$$

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等；

同理： $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 的面积相等.

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等,

$\therefore S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCM} = S_{\triangle DBC} - S_{\triangle BCM}$, 即, $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle DMC}$.

(2)解: $\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD}$,

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} BD \cdot CF,$$

$$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{AC},$$

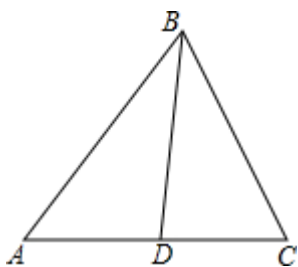
$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{4}{3}.$$

【点拨】本题考查了三角形的面积, 平行线间的距离相等, 熟记等底等高的三角形的面积相等是解题的关键.

例

3. 如图, $\triangle ABC$ 的周长是 21cm, $AB=AC$, 中线 BD 分 $\triangle ABC$ 为两个三角形, 且 $\triangle ABD$ 的周长比 $\triangle BCD$ 的周长大 6cm, 求 AB , BC .



【答案】 $AB=9\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$.

【分析】由 BD 是中线, 可得 $AD=CD$, 又由 $\triangle ABD$ 的周长比 $\triangle BCD$ 的周长大 6cm, $\triangle ABC$ 的周长是 21cm, $AB=AC$, 可得 $AB-BC=6\text{cm}$, $2AB+BC=21\text{cm}$, 继而求得答案.

解: $\because BD$ 是中线,

$$\therefore AD=CD=\frac{1}{2} AC,$$

$\because \triangle ABD$ 的周长比 $\triangle BCD$ 的周长大 6cm,

$$\therefore (AB+AD+BD) - (BD+CD+BC) = AB - BC = 6\text{cm} \text{ ①},$$

$\because \triangle ABC$ 的周长是 21cm, $AB=AC$,

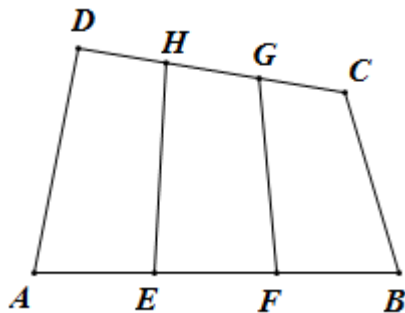
$$\therefore 2AB+BC=21\text{cm} \text{ ②},$$

联立①②得: $AB=9\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$.

【点拨】本题考查了三角形周长与三角形的中线. 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

举一反三：

【变式 1】如图所示，设四边形 $ABCD$ 的面积为 S_1 ，四边形 $EFGH$ 的面积为 S_2 ，其中 E 、 F 分别为 AB 边上的两个三等分点， G 、 H 分别为 CD 边上的两个三等分点，请直接写出 S_1 与 S_2 的等量关系，并说明理由。



【答案】 $S_1 = 3S_2$ ，理由见分析。

【分析】如图连结 DE 、 EG 、 GB ，然后根据三角形等底等高得到 $S_{\triangle DHE} = S_{\triangle HCE}$ ， $S_{\triangle EFF} = S_{\triangle FBC}$ ，进而得到 $S_2 = \frac{1}{2}S_{DEBG}$ ，然后再说明 $S_1 - (S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BCG}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)S_1 = \frac{2}{3}S_1$ 即可解答。

解： $S_1 = 3S_2$ ，理由如下：

连结 DE 、 EG 、 GB 、 BD ，则： $S_{\triangle BDE} = \frac{2}{3}S_{\triangle BAD}$ ， $S_{\triangle BDG} = \frac{2}{3}S_{\triangle BCD}$ ，

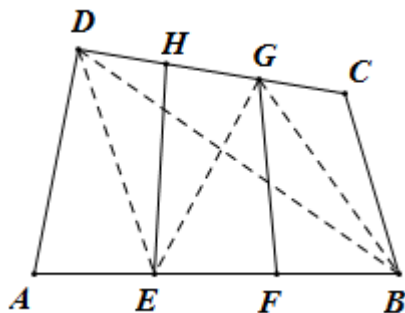
$S_{\triangle EHG} = S_{\triangle EHD}$ ， $S_{\triangle BGF} = S_{\triangle EGF}$ ，

$$\therefore S_{DEBG} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = \frac{2}{3}S_1,$$

又 $\because S_{\triangle EHG} = S_{\triangle EHD}$ ， $S_{\triangle BGF} = S_{\triangle EGF}$ ，

$$\therefore S_{EFHG} = \frac{1}{2}S_{DEBG} = \frac{1}{3}S_1,$$

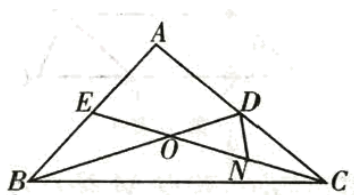
$$\therefore S_2 = \frac{1}{3}S_1, \text{ 即 } S_1 = 3S_2.$$



【点拨】本题主要考查了三角形的等分点以及三角形的面积，掌握等底等高三角形的面积关系是解答本题的关键。

【变式2】如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 、 CE 是边 AC 、 AB 上的中线， BD 与 CE 相交于点 O ， N 是 OC 的中点。

- (1) 求证： $OC = 2OE$ ； (2) 若 $S_{\triangle CDN} = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。



【答案】(1) 详见分析；(2) 12.

【分析】

(1) 由 BD 、 CE 是边 AC 、 AB 上的中线得到点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，然后根据重心的性质易得 $OC = 2OE$ ；

(2) 根据三角形面积公式易得 $S_{\triangle OCD} = 2S_{\triangle CDN} = 2$ ，再利用重心的性质得 $OB:OD = 2:1$ ，则 $S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle OCD} = 6$ ，然后根据 $AD = CD$ 可得 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BCD} = 12$ 。

解：(1) $\because BD$ 、 CE 是边 AC 、 AB 上的中线，

$\therefore$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore OC:OE = 2:1$ ，即 $OC = 2OE$ ；

(2) $\because N$ 是 OC 的中点，

$\therefore S_{\triangle OCD} = 2S_{\triangle CDN} = 2$ ，

$\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore OB:OD = 2:1$ ，

$\therefore S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle OCD} = 6$ ，

$\therefore BD$ 为中线,

$\therefore AD = CD$,

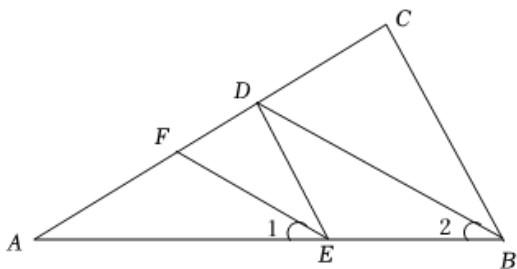
$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BCD} = 12$.

【点拨】本题考查了三角形重心：三角形的重心是三角形三边中线的交点，重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1. 也考查了三角形中线的性质.

例

4. 请补全证明过程及推理依据.

已知：如图， $BC \parallel ED$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， EF 平分 $\angle AED$.



求证： $BD \parallel EF$.

证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， EF 平分 $\angle AED$ ，

$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle AED$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABC$ (_____)

$\because BC \parallel ED$ (_____)

$\therefore \angle AED = \angle ABC$ (_____)

$\therefore \frac{1}{2} \angle AED = \frac{1}{2} \angle ABC$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore BD \parallel EF$ (_____).

【答案】角平分线的定义；已知； $\angle ABC$ ；两直线平行，同位角相等； $\angle 2$ ；同位角相等，两直线平行

【分析】根据角平分线的定义得出 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle AED$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABC$ ，根据平行线的性质定理得出 $\angle AED = \angle ABC$ ，求出 $\angle 1 = \angle 2$ ，再根据平行线的判定定理推出即可.

解：证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， EF 平分 $\angle AED$ ，

$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle AED$ ， $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABC$ (角平分线的定义)

$\because BC \parallel ED$ (已知)

$\therefore \angle AED = \angle ABC$ (两直线平行，同位角相等)

$$\therefore \frac{1}{2} \angle AED = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore BD \parallel EF \text{ (同位角相等, 两直线平行)}.$$

故答案为：角平分线的定义；已知； $\angle ABC$ ；两直线平行，同位角相等； $\angle 2$ ；同位角相等，两直线平行。

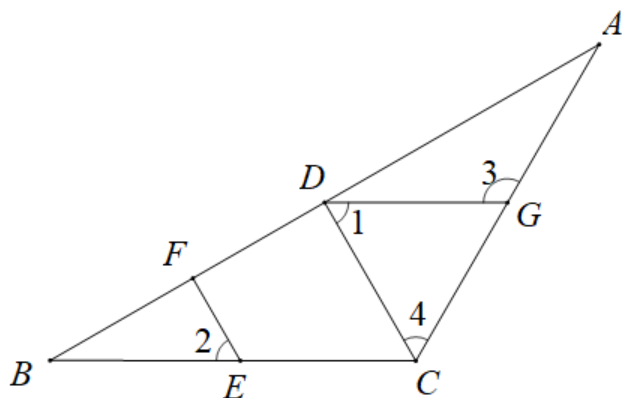
【点拨】本题考查了角平分线的定义，平行线的性质定理和判定定理等知识点，能熟记平行线的性质定理和判定定理是解此题的关键。

举一反三：

【变式 1】如图，在三角形 ABC 中 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，交 AB 于点 D ， $\angle 3 = 120^\circ$ ， $\angle 4 = 60^\circ$ 。

(1) 求证： $DG \parallel BC$ ；

(2) 如果 $\angle 1 = \angle 2$ ， $EF \perp AB$ ，试证明 $CD \perp AB$ 。



【分析】

(1) 先根据角平分线的定义求得 $\angle ACB$ ，进而说明 $\angle ACB = \angle 3$ ，然后运用同位角相等、两直线平行即可证明；

(2) 先根据两直线平行、内错角相等可得 $\angle 1 = \angle BCD$ ，进而得到 $\angle BCD = \angle 2$ 可得 $EF \parallel DC$ ，运用平行线的性质可得 $\angle BFE = \angle BDC$ ，最后结合 $EF \perp AB$ 即可证明。

(1) 证明： $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ， $\angle 4 = 60^\circ$ （已知）

$$\therefore \angle ACB = 2\angle 4 = 2 \times 60^\circ = 120^\circ \text{ (角平分线的定义)}$$

$$\text{又} \because \angle 3 = 120^\circ \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle 3 = \angle BCA = 120^\circ \text{ (等量代换)}$$

$$\therefore DG \parallel BC.$$

(2)证明：由(1)知 $DG \parallel BC$ (已证)

$$\therefore \angle 1 = \angle BCD \text{ (两直线平行, 内错角相等)}$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2 \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle 2 = \angle BCD \text{ (等量代换)}$$

$$\therefore DC \parallel EF \text{ (同位角相等, 两直线平行)}$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BDC \text{ (两直线平行, 同位角相等)}$$

$$\text{又} \because EF \perp AB \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle BFE = 90^\circ \text{ (垂直的定义)}$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFE = 90^\circ \text{ (等量代换)}$$

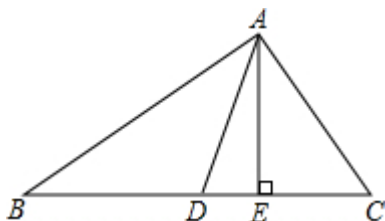
$$\therefore CD \perp AB \text{ (垂直的定义)}.$$

【点拨】本题主要考查了平行线的判定与性质、角平分线的定义等知识点，灵活运用平行线的判定与性质成为解答本题的关键。

【变式 2】如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE 是边 BC 上的高线。

(1) 若 AD 是 BC 边上的中线， $AE = 3\text{cm}$ ， $S_{\triangle ABC} = 12\text{cm}^2$ 。求 DC 的长。

(2) 若 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，求 $\angle DAE$ 的大小。



【答案】(1) $CD = 4\text{cm}$ ；(2) 5°

【分析】

(1) 根据三角形的面积公式计算三角形的底边 BC ，再根据三角形中线的性质进行求解；

(2) 根据三角形内角和定理计算 $\angle BAC$ 和 $\angle EAC$ ，再根据角平分线的定义计算出 $\angle DAC$ ，最后根据角的和差关系进行计算求解即可。

解：(1) $\because AD, AE$ 分别是边 BC 上的中线和高，

$$AE = 3\text{cm}, S_{\triangle ABC} = 12\text{cm}^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = 6\text{cm}^2, \therefore \frac{1}{2} \times AE \times CD = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times CD = 6, \text{ 解得: } CD = 4 (\text{cm});$$

(2) $\because \angle B = 40^\circ, \angle C = 50^\circ,$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \text{ 又 } \because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DAC = 45^\circ$$

又 AE 是边 BC 上的高

$$\therefore \angle EAC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ.$$

【点拨】本题主要考查三角形中线，角平分线，高，解决本题的关键是要熟练掌握三角形中重要线段的性质.

类型三、三角形边三边关系

例

5. 已知三条线段 $a=3$, $b=5$, $c=7$, 以这三条线段为边能构成三角形吗? 请说明理由.

【答案】能, 理由见分析

【分析】根据三线段构成三角形的条件即可判断.

解: $\because c$ 是最长线段, 而 $a+b=8>c$

$\therefore$ 以这三条线段为边能构成三角形

【点拨】本题考查了构成三角形的条件, 一般地: 由于最长线段与任一线段的和总是大于第三边的, 因此只要考虑两条短线段的和是否大于最长线段, 即可判断三线段是否构成三角形.

举一反三:

【变式 1】已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a , b , c .

(1) 若 a , b , c 满足 $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $a=5$, $b=2$, 且 c 为整数, 求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值及最小值.

【答案】(1) 等边三角形; (2) 最大值 13, 最小值 11

【分析】

(1) 根据完全平方式的非负性即可得出结果;

(2) 根据三角形三边关系即可得出答案.

解: (1) $\because (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$,

$$\therefore a-b=0, b-c=0,$$

$$\therefore a=b=c,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形;

(2) $\because a=5, b=2$, 且 c 为整数,

$\therefore 5-2 < c < 5+2$, 即 $3 < c < 7$,

$\therefore c=4, 5, 6$,

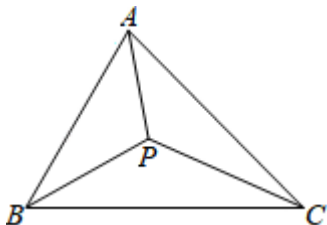
$\therefore$ 当 $c=4$ 时, $\triangle ABC$ 周长的最小值 $=5+2+4=11$;

当 $c=6$ 时, $\triangle ABC$ 周长的最大值 $=5+2+6=13$.

【点拨】本题考查了算术平方根的非负性, 三角形三边关系等知识点, 熟知相关知识是解题的关键.

【变式2】如图, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 求证:

$$PA+PB+PC > \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC.$$



【分析】根据三角形三边关系进行证明即可.

证明: $\because PA+PB > AB, PB+PC > BC, PC+PA > AC$.

$\therefore$ 把它们相加, 得: $PA+PB+PB+PC+PC+PA > AB+BC+AC$

$\therefore 2(PA+PB+PC) > AB+BC+AC$

再除以 2, 得 $PA+PB+PC > \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC$.

【点拨】本题考查的是三角形的三边关系, 熟知三角形任意两边之和大于第三边是解答此题的关键

类型四、三角形内角和与外角性质

例

6. 如图, 直线 $a \parallel b$, AB 与 a, b 分别相交于点 A, B , 且 $AC \perp AB$, AC 交直线 b 于点 C .

(1) 若 $\angle 1=58^\circ$, 求 $\angle 2$ 的度数;

(2) 若 $AC=5, AB=12, BC=13$, 求直线 a 与 b 的距离.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/65703403410006064>