

第11章 动量定理

§ 11-1 基本概念

§ 11-2 动量定理及其基本方程

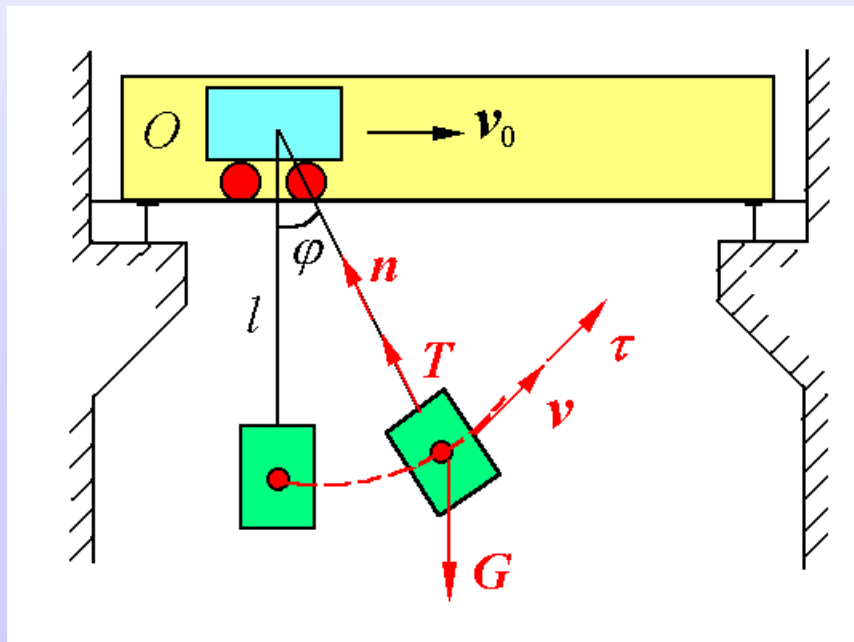
§ 11-3 质心运动定理和动量守恒

[例1] 桥式起重机跑车吊挂一重为 G 的重物，沿水平横梁作匀速运动，速度为 $\bar{v}_0$ ，重物中心至悬挂点距离为 L 。突然刹车，重物因惯性绕悬挂点 O 向前摆动，求钢丝绳的最大拉力。

解：①选重物(抽象为质点)为研究对象

②受力分析如图所示

③运动分析，沿以 O 为圆心， L 为半径的圆弧摆动。



④列出自然形式的质点运动微方程

$$ma_{\tau} = \sum F_{\tau}, \quad \frac{G}{g} \frac{dv}{dt} = -G \sin \varphi \quad <1>$$

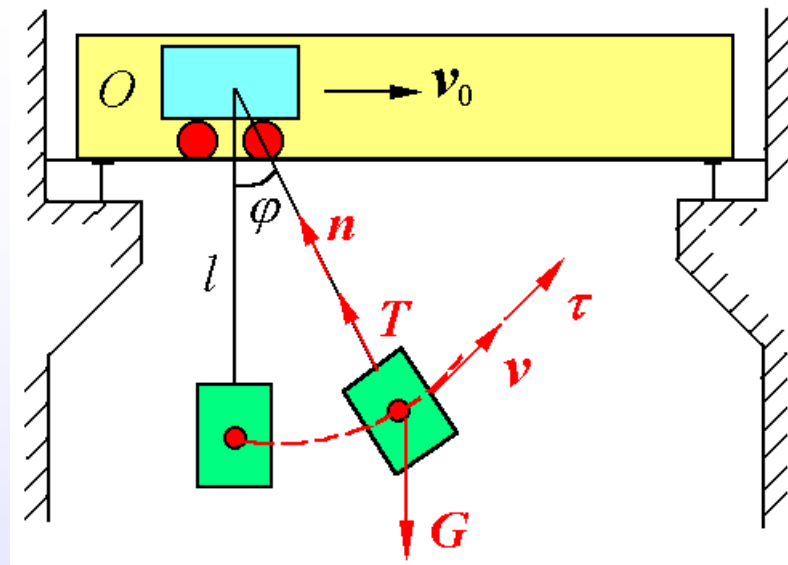
$$ma_n = \sum F_n, \quad \frac{G}{g} \frac{v^2}{l} = T - G \cos \varphi \quad <2>$$

⑤求解未知量

由<2>式得 $T = G(\cos \varphi + \frac{v^2}{gl})$,

其中 φ, v 为变量. 由<1>式知 重物作减速运动, 因此 $\varphi=0$ 时, $T=T_{\max}$

$$T_{\max} = G(1 + \frac{v_0^2}{gl})$$

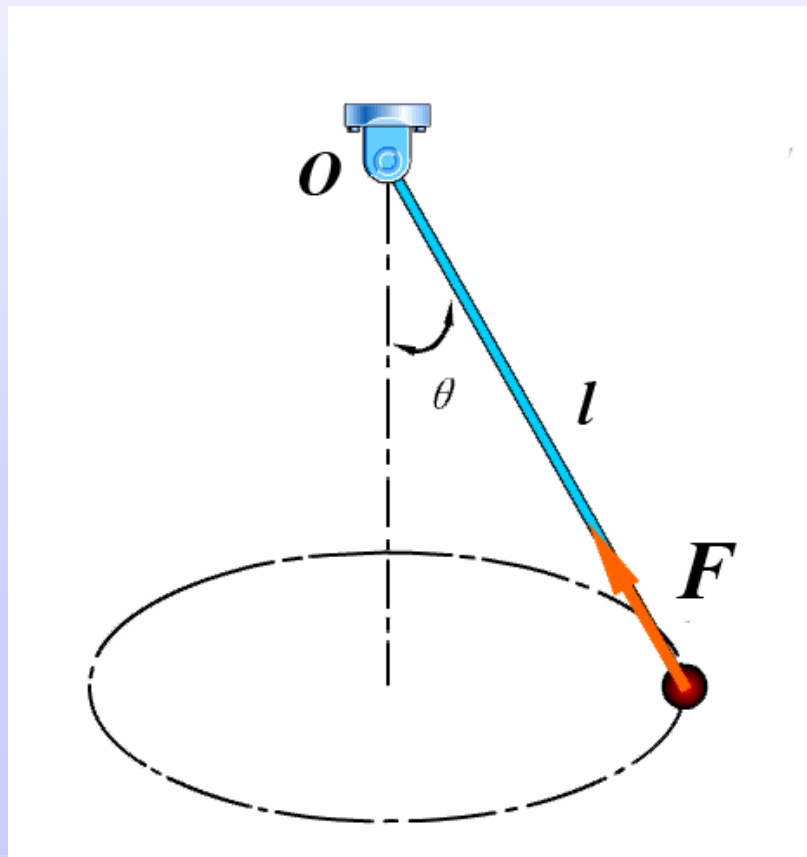


[注]①减小绳子拉力途径: 减小跑车速度或者增加绳子长度。

②拉力 $T_{\max}$ 由两部分组成, 一部分等于物体重量, 称为静拉力 一部分由加速度引起, 称为附加动拉力。全部拉力称为动拉力。

例 一圆锥摆,如图所示。质量 $m=0.1\text{kg}$ 的小球系于长 $l=0.3\text{m}$ 的绳上,绳的另一端系在固定点 O ,并与铅直线成 $\theta=60^\circ$ 角。如小球在水平面内作匀速圆周运动,求小球的速度 v 与绳的张力。

已知: $m = 0.1\text{kg}$, $l = 0.3\text{m}$, $\theta = 60^\circ$, 求 v , F

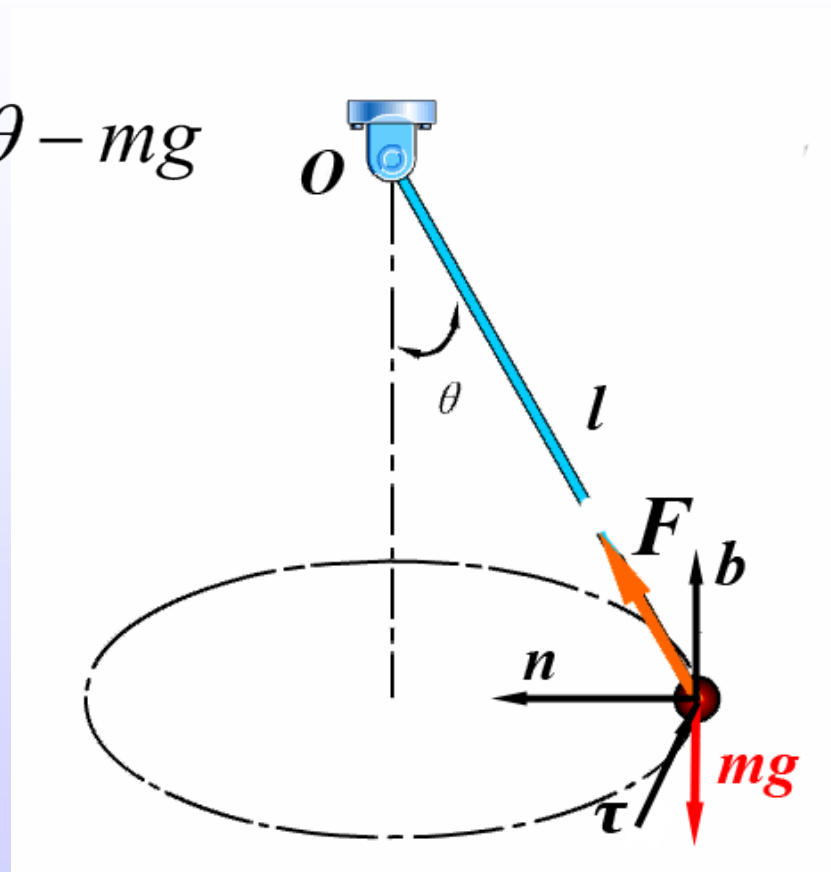


解： 研究小球(任意时刻),

$$\begin{cases} ma_n = \sum F_n \quad m \frac{v^2}{R} = F \sin \theta \\ 0 \equiv \sum F_b \quad 0 = F_b = F \cos \theta - mg \end{cases}$$

$$F = \frac{mg}{\cos \theta} = 1.96 \text{ N}$$

$$v = \sqrt{\frac{Fl \sin^2 \theta}{m}} = 2.1 \text{ m/s}$$



这是混合问题。

§ 11-1 基本概念

一、动 量

1. 动量的定义

(1) 质点的动量 质点的质量 m 与速度 v 的乘积 mv 称为该质点的动量。

(2) 质点系的动量

质点系内各质点的动量的矢量和称为该质点系的动量主矢，简称为质点系的动量。并用 p 表示，即有

$$p = \sum m_i v_i$$

动量是度量物体机械运动强弱程度的一个物理量。

枪弹：速度大，质量小； 船：速度小，质量大。

(3) 质点系动量的投影式

以 p_x ， p_y 和 p_z 分别表示质点系的动量在固定直角坐标轴 x ， y 和 z 上的投影。则有

$$p_x = \sum m_i v_{ix}, \quad p_y = \sum m_i v_{iy}, \quad p_z = \sum m_i v_{iz}$$

2. 质点系动量的简捷求法

质点系的质心 C 的矢径表达式可写为

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$$

当质点系运动时，它的质心一般也是运动的，将上式两端对时间求导数，
即得

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C$$

投影到各坐标轴上有

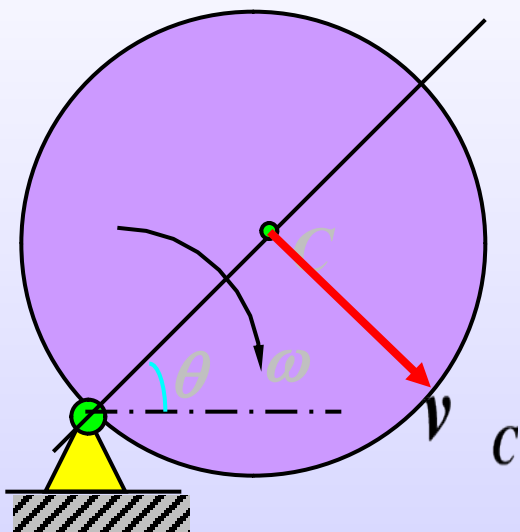
$$p_x = \sum m_i v_{ix} = m v_{Cx}$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = m v_{Cy}$$

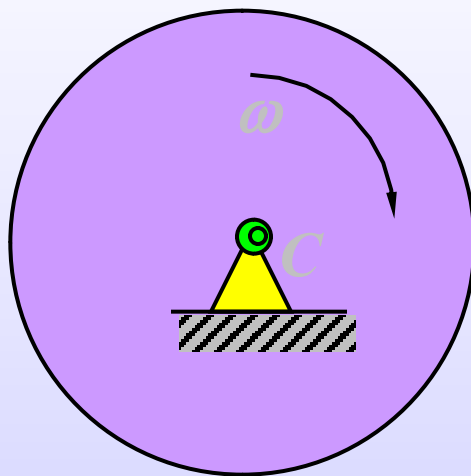
$$p_z = \sum m_i v_{iz} = m v_{Cz}$$

可见，质点系的动量，等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

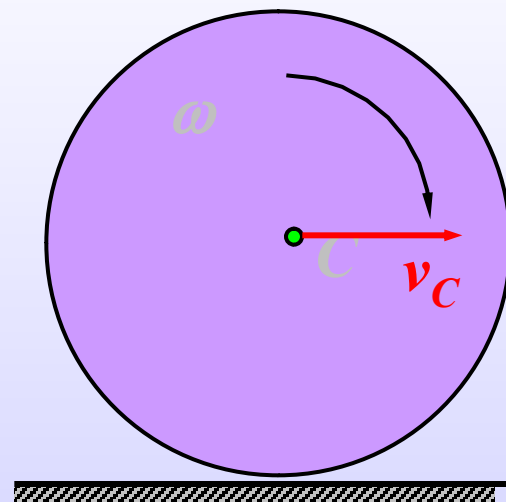
已知:圆盘质量为 M ,半径为 r ,图示瞬时三种情况下圆盘的 ω , 求各自的动量。



$$p = Mv_C = M\omega r$$



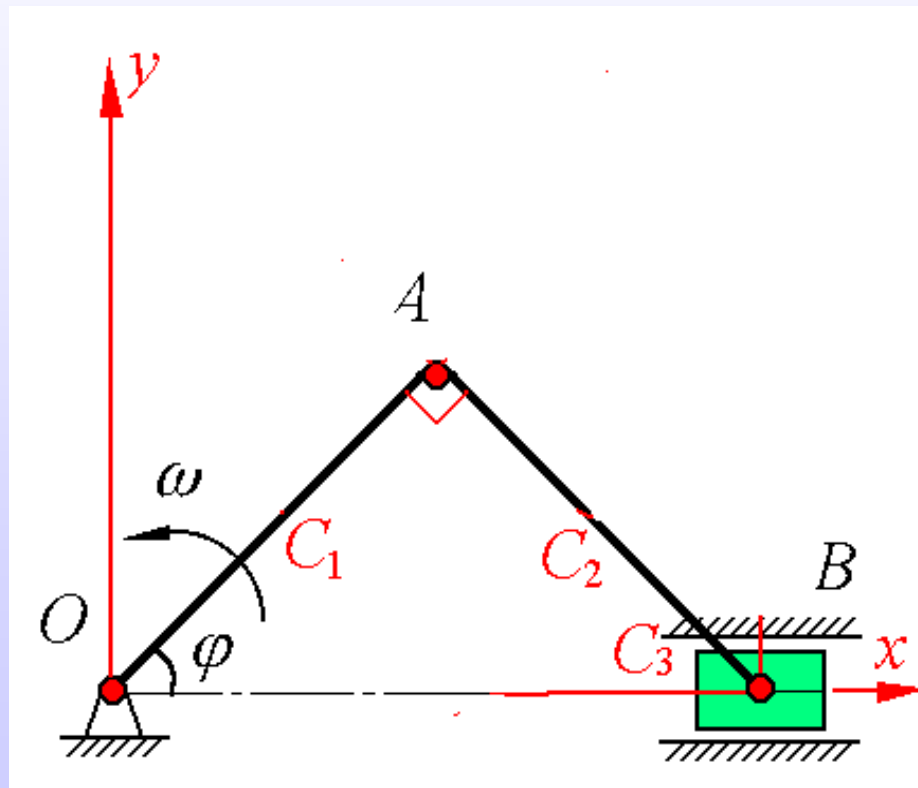
$$p = 0$$

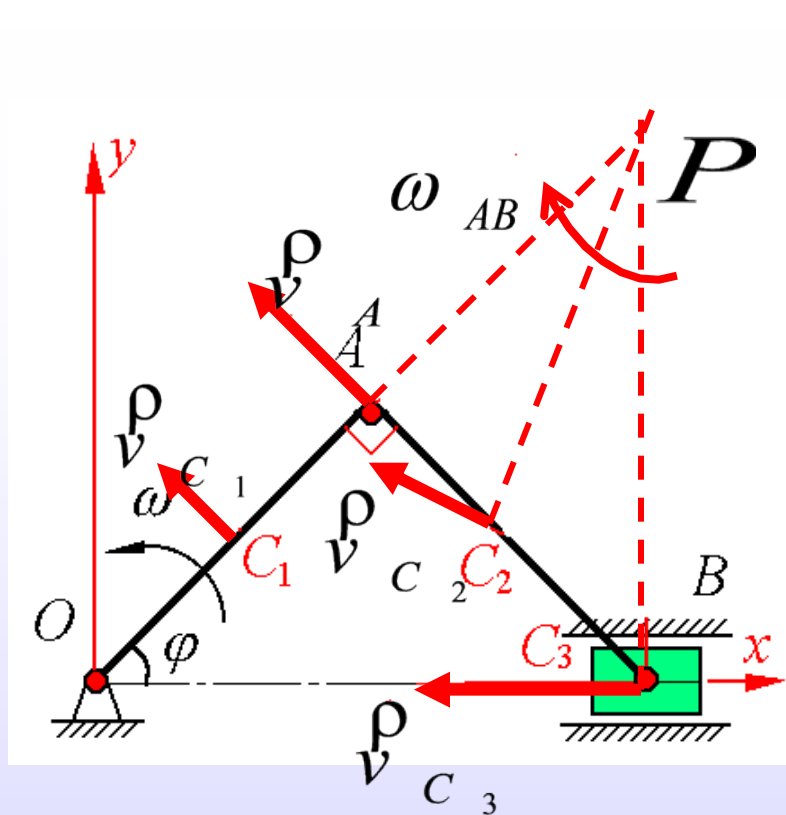


$$p = Mv_C = M\omega r$$

例题

曲柄连杆机构的曲柄 OA 以匀 ω 转动，设 $OA=AB=l$ ，曲柄 OA 及连杆 AB 都是匀质杆，质量各为 m ，滑块 B 的质量也为 m 。求当 $\varphi=45^\circ$ 时系统的动量。





$$\vec{P} = \sum (m_i \vec{v}_i)$$

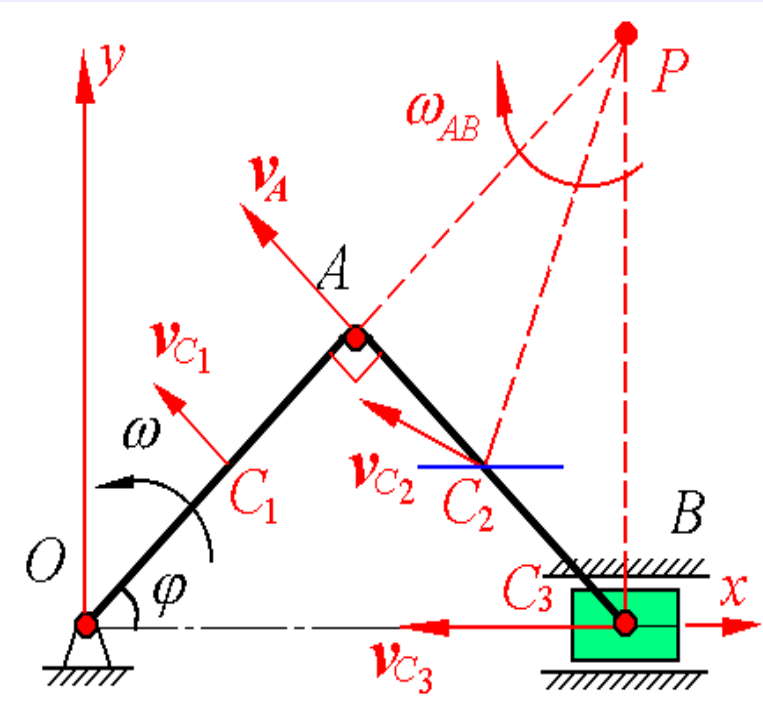
$$= m_1 \vec{v}_{C1} + m_2 \vec{v}_{C2} + m_3 \vec{v}_{C3}$$

解:

$$P_x = m v_{C1x} + m v_{C2x} + m v_{C3x}$$

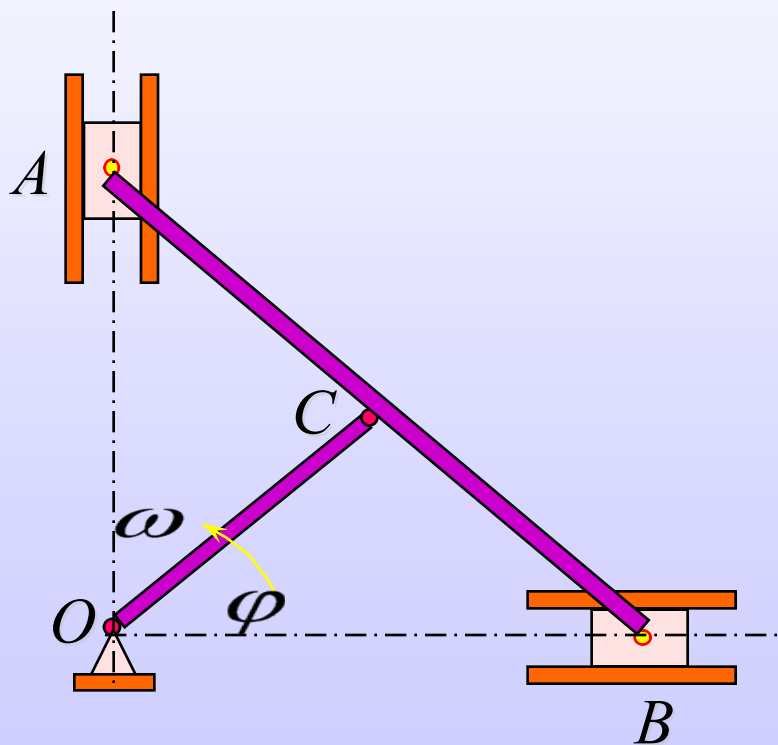
$$P_y = m v_{C1y} + m v_{C2y} + m v_{C3y}$$

$$\begin{aligned}
 P_x &= m(-v_{C1} \sin \varphi - v_{C2} \cos \theta - v_{C3}) \\
 &= m\left(-\frac{1}{2}l\omega \sin 45^\circ - \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega \cos \theta - \sqrt{2}l\omega\right) \\
 &= ml\omega\left(-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}ml\omega
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_y &= m(v_{C1} \cos \varphi + v_{C2} \sin \theta) \\
 &= m\left(\frac{1}{2}l\omega \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega \sin \theta\right) \\
 &= ml\omega\left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}ml\omega}{2}
 \end{aligned}$$

例 题



椭圆规机构中， $OC=AC=CB=l$ ；滑块A和B的质量均为 m ，曲柄OC和连杆AB的质量忽略不计；曲柄以等角速度 ω 绕O轴旋转；图示位置时，角度 φ 为任意值。

求：图示位置时，系统的总动量。

[方法一]

解：先计算各个质点的动量，再求其矢量和。

$$\mathbf{p} = m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B$$

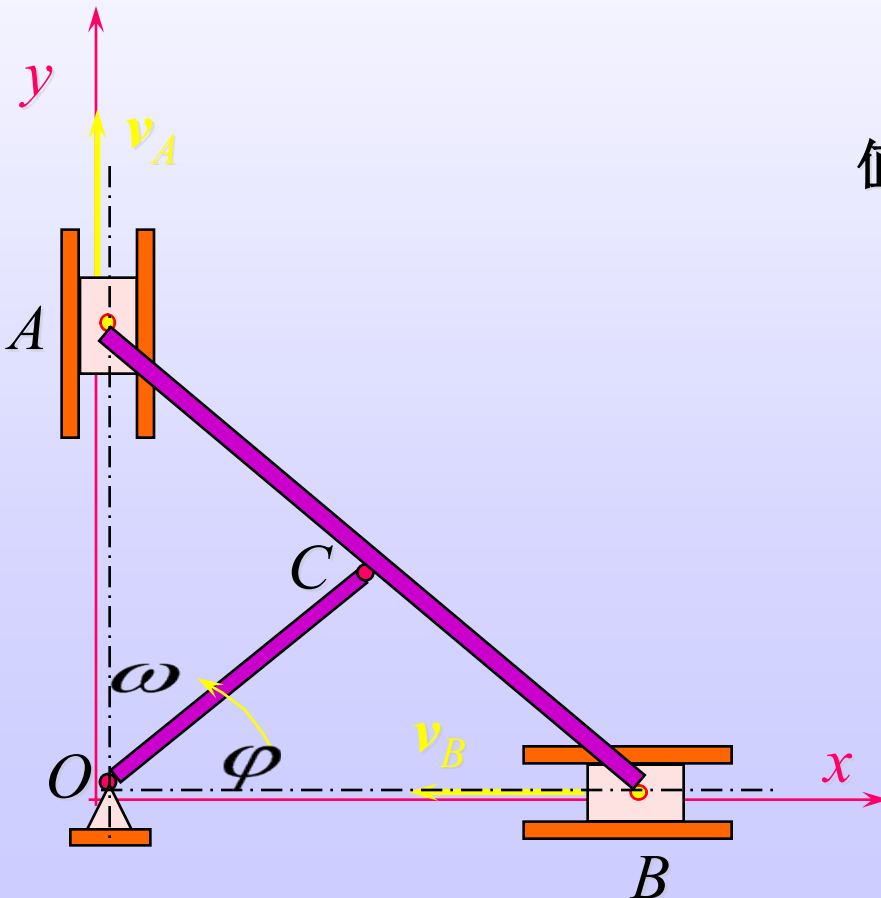
建立 Oxy 坐标系。在角度 φ 为任意值的情形下

$$y_A = 2l\sin\varphi \quad x_B = 2l\cos\varphi$$

$$v_A = \dot{y}_A = 2l\dot{\varphi}\cos\varphi = 2l\omega\cos\varphi$$

$$v_B = \dot{x}_B = -2l\dot{\varphi}\sin\varphi = -2l\omega\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= -2lm\omega\sin\varphi \mathbf{i} + 2lm\omega\cos\varphi \mathbf{j} \\ &= 2lm\omega(-\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j})\end{aligned}$$



[方法二]

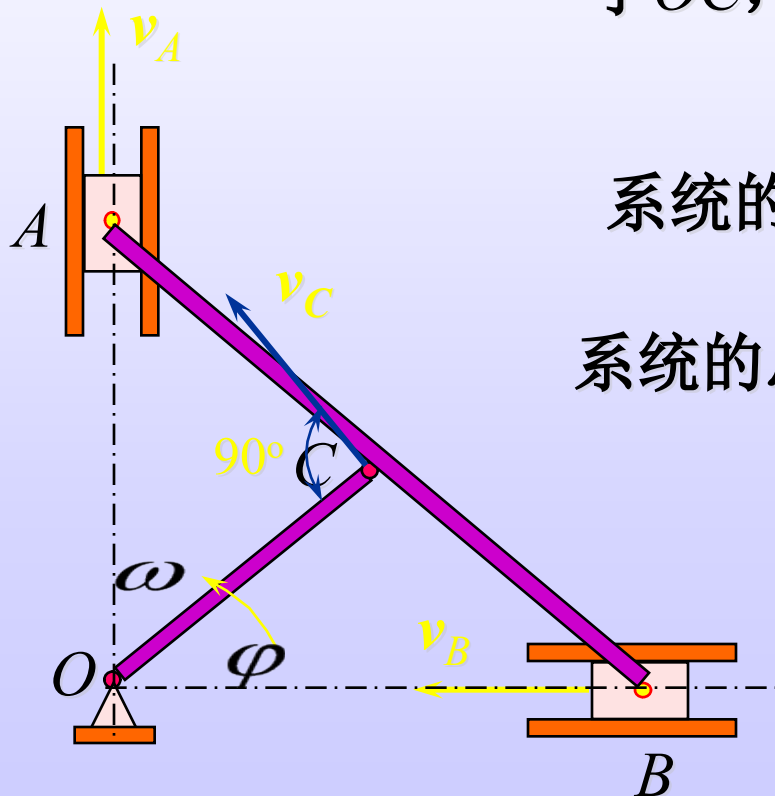
解：先确定系统的质心，以及质心的速度，然后计算系统的动量。

质点系的质心在 C 处，其速度矢量垂直于 OC ，数值为 $v_c = l\omega$

$$\mathbf{v}_c = l\omega(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})$$

系统的总质量 $m_C = m_A + m_B = 2m$

系统的总动量 $\mathbf{p} = 2lm\omega(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})$



讨论：若考虑 OC 、 AB 杆质量，系统的动量又如何？

例9-2: 已知椭圆规的 AB 杆质量为 $2m_1$, OC 杆质量为 m_1 , 物块A,B 质量为 m_2 , $OC=AC=BC=l$, 物系的动量。

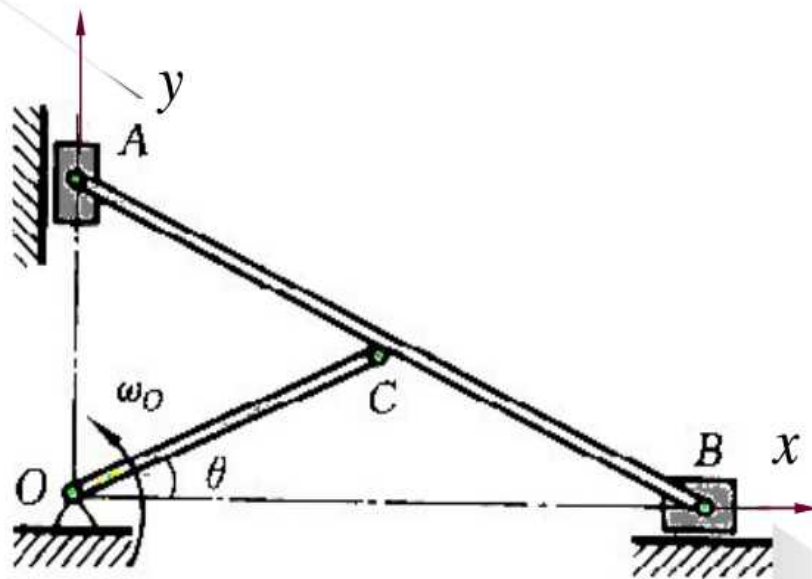
解:

$$x_c = \frac{m_1 \frac{l}{2} \cos \omega t + 2m_1 l \cos \omega t + 2m_2 l \cos \omega t}{3m_1 + 2m_2}$$

$$y_c = \frac{m_1 \frac{l}{2} \sin \omega t + 2m_1 l \sin \omega t + 2m_2 l \sin \omega t}{3m_1 + 2m_2}$$

$$p_x = m \dot{x}_c = -\omega l \sin \omega t \left(\frac{5}{2} m_1 + 2m_2 \right),$$

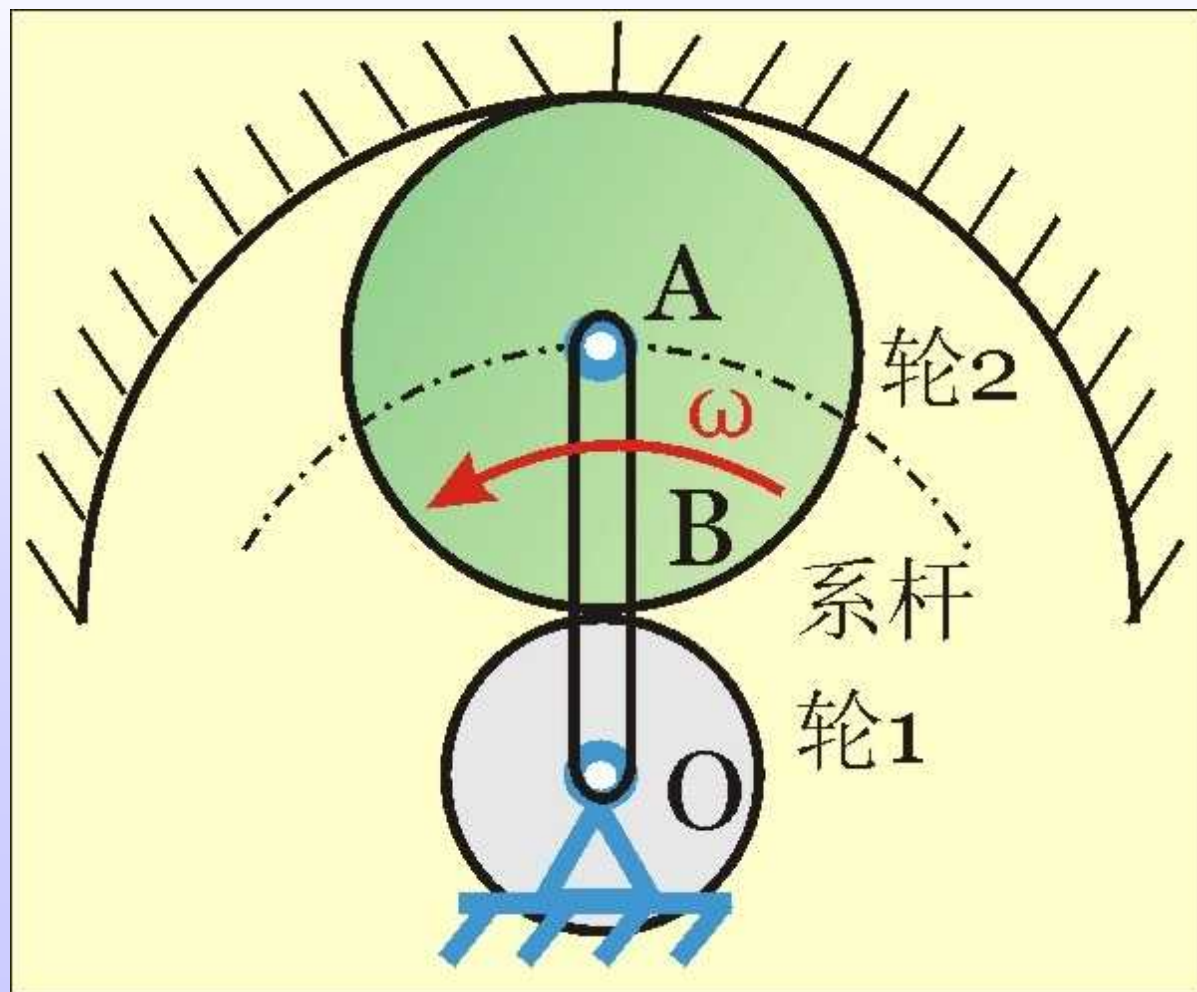
$$p_y = m \dot{y}_c = \omega l \cos \omega t \left(\frac{5}{2} m_1 + 2m_2 \right),$$



$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = l\omega \left(\frac{5}{2} m_1 + 2m_2 \right),$$

$$\tan \alpha = \frac{p_y}{p_x} = \tan \omega t,$$

- ◆ 例：已知轮系中的 r_1 、 m_1 、 r_2 、 m_2 及系杆 OA
- ◆ 的 m 、 ω ，求轮系的动量。



◆轮系的动量是轮1、轮2及系杆OA的动量的矢量和

◆轮1动量: $p_1 = m_1 v_{C1} = m_1 v_O = 0$

◆轮2动量: $p_2 = m_2 v_{C2} = m_2 v_A$

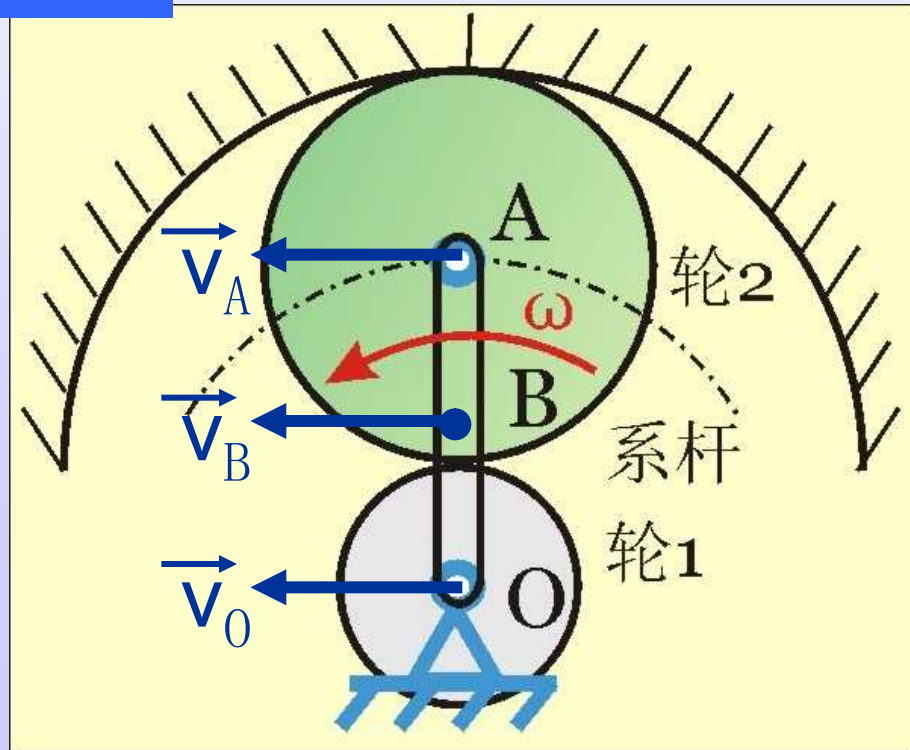
◆系杆动量 $p_3 = m v_{C3} = m v_B$ ◆B是OA的质心点

◆A、B在同一杆上:

$$v_A = \overline{OA} \cdot \omega = (r_1 + r_2) \omega$$

$$v_B = \overline{OB} \cdot \omega$$

$$= \frac{r_1 + r_2}{2} \omega = \frac{v_A}{2}$$

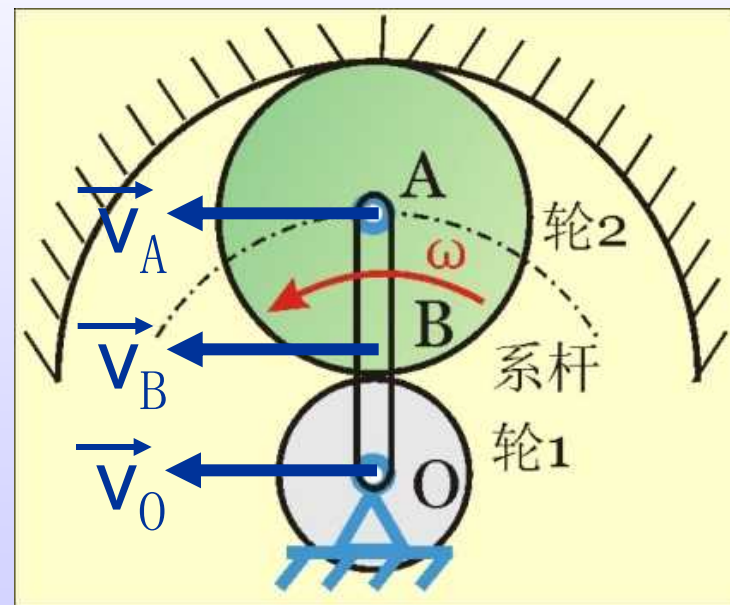


- ◆轮2及系杆OA的动量方向与 $\mathbf{V}_A$ 、 $\mathbf{V}_B$ 相同，
- ◆则轮系的动量方向与 $\mathbf{V}_A$ 相同。
- ◆轮系动量的大小：

$$p = p_2 + p_3 = m_2 v_A + m v_B$$

$$= m_2(r_1 + r_2)\omega + m \frac{(r_1 + r_2)}{2} \omega$$

$$= \frac{1}{2}(2m_2 + m)(r_1 + r_2)\omega$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/657042036160006026>