

1. 【单选题】（江南博哥）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $BA - AB =$

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

正确答案：B

参考解析：
$$\text{由 } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\text{则 } BA - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. 【单选题】设矩阵 $\begin{pmatrix} a-b & a+b \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ d & c \end{pmatrix}$, 则

- A. $a=-1, b=3, c=0, d=3$
- B. $a=-1, b=3, c=1, d=3$
- C. $a=3, b=-1, c=1, d=3$
- D. $a=3, b=-1, c=0, d=3$

正确答案：D

参考解析：
$$\text{矩阵相等, 要求对应位置的每一个}$$
$$\text{元素都要相等, 则 } \begin{cases} a-b=4, \\ a+b=2, \\ d=3, \\ c=0, \end{cases} \text{ 从而得 } a=3, b=-1,$$
$$c=0, d=3, \text{ 故选 D 项.}$$

3. 【单选题】下列矩阵中, 与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 合同的是

- A. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

正确答案：B

参考解析：合同矩阵 A 和 B 有相同的秩和正惯性指数，只有 B 符合且都有一个正惯性指数

4. 【单选题】设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件为

- A. A 的行向量组线性相关
- B. A 的行向量组线性无关
- C. A 的列向量组线性相关
- D. A 的列向量组线性无关

正确答案：D

参考解析：设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件为 A 的列向量组线性无关

5. 【单选题】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，而向量 β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则对任意常数 k 必有()

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta + \beta$ 线性相关
- B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + k\beta$ 线性无关
- C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + k\beta$ 线性相关
- D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta + \beta$ 线性无关

正确答案：D

参考解析：由于 β_2 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，说明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关。

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(k\beta_1 + \beta_2) = 0$ ，由已知可知 $\beta_1 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$ 代入上式整理得 $(k_1 + k_4m_1k)\alpha_1 + (k_2 + k_4m_2k)\alpha_2 + (k_3 + k_4m_3k)\alpha_3 + k_4\beta_2 = 0$ 。

由 β_2 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示得 $k_1 + k_4m_1k = 0, k_2 + k_4m_2k = 0, k_3 + k_4m_3k = 0, k_4 = 0$ ，

显然 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 。故选项 D 成立，至于 B, C 选项，当 $k = 0$ 时线性相关，当 $k \neq 0$ 时线性无关。

设四阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $(A^T)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 【填空题】

我的回答:

正确答案:

参考解析:
$$\text{由 } \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\text{令 } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } B^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{所以 } A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{再由 } \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} B^T & O \\ O & C^T \end{pmatrix}, \\ \text{则 } (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. 【填空题】 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=-2$ ，则 $|2A^T|$ =_____.

我的回答:

正确答案:

参考解析: 由 $|A|=|A^T|$ ，则 $|2A^T|=2^3|A^T|=8 \times (-2)=-16$.

8. 【填空题】
$$\text{已知 } A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } r(A+E)+r(A-2E)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

我的回答:

正确答案:

参考解析:

矩阵的非零特征值个数就是其秩，
因 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ，所以 A 的特征值为 1，-1，
2，则 $A+E$ 的特征值为 2，0，3， $A-2E$ 的特征值
为 -1，-3，0，故 $r(A+E)=2$ ， $r(A-2E)=2$ 。因
此 $r(A+E)+r(A-2E)=4$ 。

9. 【填空题】设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2$. 则 f 的秩为_____.

我的回答:

正确答案:

参考解析:

该实二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 所以该实二次型的秩为 2.

10. 【填空题】

若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 k 应满足的条件是_____.

我的回答:

正确答案:

参考解析: 【答案】

$k \neq \frac{3}{5}$

方程组只有零解, 说明系数矩阵满秩.

即 $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5k \neq 0$.
解得 $k \neq \frac{3}{5}$.

设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Ax = 0$ 的通解为_____.

11. 【填空题】

我的回答:

正确答案:

参考解析: 【答案】 $x = k(1, 1, 1)^T$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

则基础解系 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$, 通解为 $x = k\xi_1$, 其中 k 为任意常数.

若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ _____.

12. 【填空题】

我的回答:

正确答案:

参考解析： 【答案】 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & x-10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = x-3=0, \text{ 所以 } x=3.$$

13. 【填空题】 设 A 为 3 阶方阵，其特征值分别为 1，2，3，则 $|A+2E|$ = _____ .

我的回答：

正确答案：

参考解析： 【答案】 60

$$|A+2E|=(1+2) \times (2+2) \times (3+2)=3 \times 4 \times 5=60 \quad .$$

14. 【填空题】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^T B =$ _____ .

我的回答：

正确答案：

参考解析： 【答案】

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. 【填空题】 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\gamma = -2\alpha - \beta$, 则 $\alpha + \beta - 3\gamma =$ _____ .

我的回答：

正确答案：

参考解析： 【答案】

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\text{由于 } \gamma = -2\alpha - \beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } \alpha + \beta - 3\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

16. 【计算题】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 2a^2 + a^3 & 2b^2 + b^3 & 2c^2 + c^3 \end{vmatrix}$ 的值.

我的回答：

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 2a^2 & 2b^2 & 2c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

参考解析：

17. 【计算题】求向量组 $\alpha_1 = (2, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, 4)^T$ 的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组表示出来.

我的回答：

由题设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{故此向量组的一个极大无关组为}$$

α_1, α_2 (或 α_1, α_3), 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ (或 $\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1$).

参考解析：

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

18. 【计算题】

我的回答：

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-1)(\lambda-3)^2,
 \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 1, 3, 3.

对 $\lambda=1$, 解齐次线性方程组 $(E-A)x=0$,

$$\text{得} \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (x_3 \text{ 为自由未知量})$$

令 $x_3=1$, 得属于 1 的全部特征向量为

$$k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0 \text{ 为任意常数.}$$

对 $\lambda=3$, 解齐次线性方程组 $(3E-A)x=0$

$$\text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \end{cases} \quad (x_3 \text{ 为自由未知量})$$

参考解析:

$$\text{令 } x_3=1, \text{ 得属于 } 3 \text{ 的全部特征向量为 } k \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$$

19. 【计算题】

求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$ 的通解(要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

我的回答:

参考解析:

解: 对非齐次线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 - 2, \\ x_2 = x_3 - x_4 - 3. \end{cases}$

由此得到非齐次线性方程组的特解 $\eta^* = (-2, -3, 0, 0)^T$,

导出组的一个基础解系为 $\xi_1 = (-1, 1, 1, 0)^T, \xi_2 = (2, -1, 0, 1)^T$.

从而, 线性方程组的通解为 $x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \eta^*$, 其中 k_1, k_2 是任意常数.

20. 【计算题】

用配方法求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的标准型, 并写出相应的线性变换.

我的回答:

解: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

$$= (x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3) + (4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2$$

$$= (x_1 - x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - x_3^2,$$

作可逆线性变换, $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3, \\ y_2 = 2x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$

参考解析: 得标准型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

21. 【计算题】

λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解和有无穷多解? 当方程组有无穷多解时求其通解.

我的回答:

参考解析：线性方程组的增广矩阵

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1) \end{bmatrix}.$$

所以, 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, 方程组有唯一解;

当 $\lambda = -2$ 时, $r(\mathbf{A}) = 2, r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, 方程组无解; 当 $\lambda = 1$ 时, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1$, 方程组有无穷多组解.

当方程组有无穷多解时, 同解方程组为 $x_1 = -x_2 - x_3 - 2$,

令 $x_2 = x_3 = 0$, 得 $x_1 = -2$, 从而得到方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

原方程组的导出组的同解方程组为 $x_1 = -x_2 - x_3$,

设自由未知量分别取值 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

所以原方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c_1, c_2 为任意常数).

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 且满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, 求 $\mathbf{B}$.

22. 【计算题】

我的回答:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{B} = \mathbf{A} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

参考解析:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{E}, \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{则 } \mathbf{B} &= (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, 试证明: $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{AB} - \mathbf{E}|$.

23. 【证明题】

我的回答:

证明：由于 $\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E-AB \\ E & B \end{pmatrix}$ ，其中 $\begin{vmatrix} E & -A \\ O & E \end{vmatrix} = 1$ ，两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & E-AB \\ E & B \end{vmatrix} = (-1)^{2n} |AB-E| = |AB-E|, \text{ 故 } \begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB-E|.$$

高等教育自学考试《线性代数（经管类）》模拟卷(二)

1. 【单选题】 设 A 为三阶方阵，其特征值分别为 1，-2，-1，则 $|A^T+E| =$ （）
- A. 0
- B. 2
- C. -2
- D. 12

正确答案： A

参考解析： 因 A 与 A^T 有相同的特征值，所以 A^T 的特征值也为 1，-2，-1，则 A^T+E 的特征值为 2，-1，0，故 $|A^T+E| = 2 \times (-1) \times 0 = 0$.

2. 【单选题】 下列矩阵中能相似于对角阵的矩阵是 （）

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

正确答案： C

由题知,四个矩阵的特征值均是 1, 1, 2, 存在二重特征值 1, 故只有二重特征值对应的线性无关的特征向量的个数 $3 - r(E - A) = 2$, 即 $r(E - A) = 1$ 时, 该矩阵能相似于对角阵. 由 A 项

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{得 } r(E - A) = 2 \neq 1, \text{ 则 A}$$

项不相似于对角阵. 由 B 项 $E - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 得 $r(E - A) = 2 \neq 1$, 则 B 项也不相

似于对角阵. 由 C 项 $E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得 } r(E - A) = 1, \text{ 则 C 项可相似于对}$$

角阵. 由 D 项 $E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $r(E - A) =$

$2 \neq 1$, 则 D 项也不相似于对角阵.

3. 【单选题】A、B 为 n 阶矩阵, 且 $A \sim B$, 则下述结论中不正确的是 ()

A. $\lambda E - A = \lambda E - B$

B. $|A| = |B|$

C. $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

D. $r(A) = r(B)$

正确答案: A

由方阵相似性质知, 若 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$, $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, $r(A) = r(B)$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. 故 B, C, D 项都正确. 只有 A 项不

正确.

设矩阵 A 与对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $A^2 =$

4. 【单选题】

A. -E

B. E

C. D

D. A

正确答案: B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/657055065004006156>