辽宁省名校联盟2024-2025学年高二上学期12月联合考试数学试卷

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．$90\times91\times92\times\cdots\times100$可以表示为（　）

A．A_{100}^{10}　　B．A_{100}^{11}　　C．A_{100}^{12}　　D．A_{100}^{13}

2．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-1,0)$，且椭圆$C$上的点与两焦点构成的三角形的面积的最大值为$2\sqrt{2}$，则椭圆$C$的方程为（　）

A．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　　B．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$

C．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$　　D．$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$

3．若$C_{18}^{3n+6}=C_{18}^{4n-2}$，则$n$的值为（　）

A．2　　B．8　　C．2或8　　D．2或4

4．已知直线$l:kx-y-2k+2=0(k\in\mathbf{R})$过定点$Q$，若$P$为圆$C:(x-5)^2+(y-6)^2=4$上任意一点，则$|PQ|$的最大值为（　）

A．3　　B．5　　C．7　　D．9

5．已知向量$\vec{a}=(2,-1,2),\vec{b}=(-1,3,-3),\vec{c}=(13,6,\lambda)$，若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，则$\lambda=$（　）

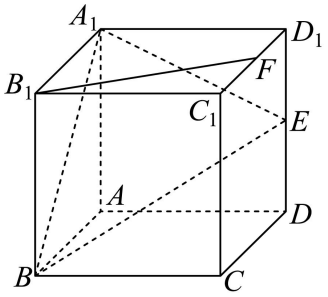
A．2　　B．3　　C．4　　D．6

6．已知双曲线$C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，则$C$的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$是$C$的离心率为$\frac{5}{4}$的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱DD_1的中点，点F在棱C_1D_1上，且$\overrightarrow{D_1F}=\lambda\overrightarrow{D_1C_1}$，若$B_1F$ // 平面A_1BE，则$\lambda=$（　）



A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．据典籍《周礼•春官》记载，“宫、商、角、徵、羽”这五音是中国古乐的基本音阶，成语“五音不全”就是指此五音.如果把这五个音阶全用上，排成一个五音阶音序，要求“宫”不为末音阶，“羽”不为首音阶，“商”“角”不相邻，则可以排成不同音序的种数是（　）

A．50　　B．64　　C．66　　D．78

二、多选题

9．已知在$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$的二项展开式中第 3 项和第 4 项的二项式系数最大，则（　）

A．$n=6$

B．展开式的各项系数和为 243

C．展开式中奇数项的二项式系数和为 16

D．展开式中不含常数项

10．已知空间中三点$A(2,0,1),B(2,2,0),C(0,2,1)$，则（　）

A．与向量$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量是$\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

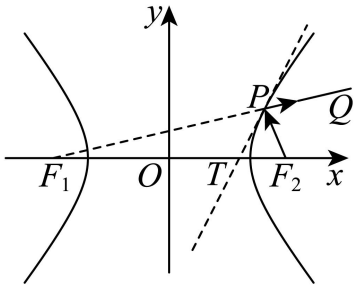
B．$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量是$(-1,1,0)$

C．$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值是$\frac{1}{5}$

D．坐标原点$O(0,0,0)$关于平面ABC的对称点是$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$

11．圆锥曲线具有丰富的光学性质．双曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点F_2处发出的光线，经过双曲线在点P处反射后，反射光线所在直线经过另一个焦点F_1，且双曲线在点P处的切线平分$\angle F_1PF_2$．如图，对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线C过点$(3,-1)$，其左、右

焦点分别为F_1,F_2．若从F_2发出的光线经双曲线右支上一点P反射的光线为PQ，点P处的切线交x轴于点T，则下列说法正确的是（　）



A．双曲线C的方程为$x^2-y^2=8$

B．过点P且垂直于PT的直线平分$\angle F_2PQ$

C．若$PF_2\perp PQ$，则$|PF_1|\cdot|PF_2|=18$

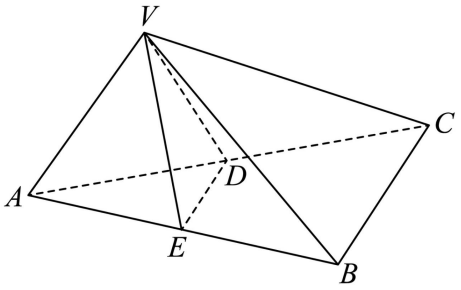
D．若$\angle F_1PF_2=60°$，则$|PT|=\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$

三、填空题

12.已知抛物线$y^2=4x$，且P是抛物线上一点，设F是抛物线的焦点，$M(4,2)$，则$|PM|+|PF|$的最小值为_____.

13．若直线$x+(1+m)y-2=0$和直线$mx+2y+4=0$平行，则m的值为_____.

14．如图，在三棱锥$V-ABC$中，底面是边长为2的等边三角形，D,E分别是AC,AB的中点，且$VA=VD=VE=1$，则直线VA与平面VBC所成角为_____.，四棱锥$V-BCDE$的外接球的表面积为_____.



四、解答题

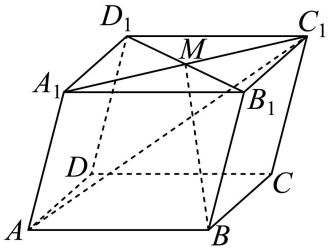
15．已知$(1+2x)^2+(1+2x)^3+\cdots+(1+2x)^n=9+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

(1)求n的值；

(2)求$(a_1+a_3+a_5+\cdots)-(a_2+a_4+a_6+\cdots)$的值；

(3)求a_2的值（结果用数字表示）.

16．如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以顶点A为端点的三条棱长都是1，且它们彼此的夹角都是60°，M为A_1C_1与B_1D_1的交点.若$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.



(1)用$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$表示$\overrightarrow{BM}$；

(2)求对角线AC_1的长；

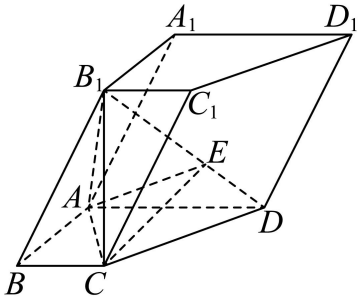
(3)求$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC_1}\rangle$.

17．在平面直角坐标系xOy中，已知动圆M与圆$x^2+y^2-2x=0$内切，且与直线$x=-2$相切，设动圆圆心M的轨迹为曲线E.

(1)求曲线E的方程；

(2)过点$F(1,0)$作两条互相垂直的直线与曲线E相交于A，B两点和C，D两点，求四边形$ACBD$的面积S的最小值.

18．在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$B_1C\perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$，$BB_1=\sqrt{5}$，E是线段B_1D上的点.



(1)点C_1到平面B_1CD的距离；

(2)若E为B_1D的中点，求异面直线DD_1与AE所成角的余弦值；

(3)在线段B_1D上是否存在点E，使得二面角$C-AE-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$？若存在，请确定E点位置；若不存在，试说明理由.

19．通过研究发现对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点A沿逆时针方向旋转$\theta$角可得到向量$\overrightarrow{AP}=\left(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta\right)$，这一过程叫做把点$B$绕点A逆时针方向旋转$\theta$角得到点$P$.

(1)已知平面内点$A\left(-\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$，点$B\left(\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$，把点$B$绕点A逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$得到点$P$，求点$P$的坐标；

(2)已知二次方程$x^2+y^2-xy=1$的图像是由平面直角坐标系下某标准椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$绕原点$O$逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$所得的斜椭圆$C$.

（i）求斜椭圆C的离心率；

（ii）过点$Q\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$作与两坐标轴都不平行的直线$l_1$交斜椭圆$C$于点$M,N$，过原点$O$作直线$l_2$与直线$l_1$垂直，直线$l_2$交斜椭圆$C$于点$G,H$，判断$\frac{\sqrt{2}}{|MN|}+\frac{1}{|OH|^2}$是否为定值？若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	C	B	D	C	A	BCD	ABD
题号	11									
答案	ABD									

1．B

【分析】根据排列数的计算公式即可求解.

【详解】由排列数公式$\mathrm{A}_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)$，

可知$90\times91\times92\times\cdots\times100=\mathrm{A}_{100}^{11}$.

故选：B.

2．A

【分析】根据焦点及焦点三角形面积最值列式求a,b,c，即可得方程.

【详解】因为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-1,0)$，所以$c=1$，

因为椭圆C上的点与两焦点构成的三角形的面积的最大值为$2\sqrt{2}$，所以

$\frac{1}{2}\times2c\times b=cb=2\sqrt{2}=b$，

则$a^2=b^2+c^2=9$，故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

故选：A.

3．A

【分析】利用组合数的性质求出n的值.

【详解】由组合数的性质可得$\begin{cases}3n+6\le18\\4n-2\le18\end{cases}$，解得$n\le4$，

又$\mathrm{C}_{18}^{3n+6}=\mathrm{C}_{18}^{4n-2}$，所以$3n+6=4n-2$或$3n+6+4n-2=18$，

解得$n=8$（舍去）或$n=2$.

故选：A.

4．C

【分析】将直线l的方程化为点斜式，求点Q坐标，判断点Q与圆C的位置关系，结合圆的性质求$|PQ|$的最大值.

【详解】由$l:kx-y-2k+2=0(k\in\mathbf{R})$，得$y-2=k(x-2)$，

所以直线l过定点$Q(2,2)$，

由$C:(x-5)^2+(y-6)^2=4$，知圆心坐标$(5,6)$，半径为2，

所以Q到圆心的距离为$d=\sqrt{(5-2)^2+(6-2)^2}=5>2$，

所以Q在圆外，故$|PQ|$的最大值为$d+2=7$.

故选：C.

5．B

【分析】根据空间向量共面定理结合线性运算的坐标运算计算即可.

【详解】因为$\vec{a}=(2,-1,2),\vec{b}=(-1,3,-3),\vec{c}=(13,6,\lambda)$，三个向量共面，

所以存在唯一实数对(x,y)，使得$\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$，

所以$(2,-1,2)=x(-1,3,-3)+y(13,6,\lambda)$，所以$\begin{cases}-x+13y=2\\3x+6y=-1\\-3x+y\lambda=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{9}\\y=\dfrac{1}{9}\\\lambda=3\end{cases}$.

故选：B.

6．D

【分析】根据充分、必要条件的定义结合双曲线的几何性质判断求解即可.

【详解】充分性：当双曲线C的焦点在x轴上时，由渐近线方程为$y=\pm\dfrac{3}{4}x$，知$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$，

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$；

当双曲线C的焦点在y轴上时，由渐近线方程为$y=\pm\dfrac{3}{4}x$，知$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$，即$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{5}{3}$，所以充分性不成立.

必要性：由离心率为$\dfrac{5}{4}$，知$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{5}{4}$，所以$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$，

当双曲线C的焦点在x轴上时，渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{3}{4}x$；

当双曲线C的焦点在y轴上时，渐近线方程为$y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{4}{3}x$，所以必要性不成立.

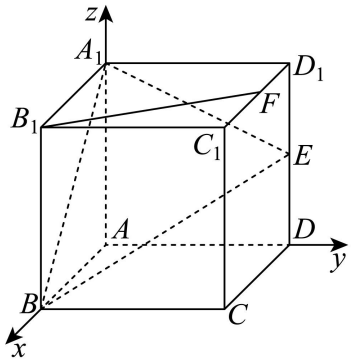
综上所述，C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$ 是 C 的离心率为 $\frac{5}{4}$ 的既不充分也不必要条件.

故选：D.

7．C

【分析】建立空间直角坐标系，求平面 A_1BE 的法向量 $\vec{n}$，根据线面平行可得 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1F}=0$，运算求解即可.或利用线面平行的判定结合条件可得.

【详解】解法一：以 A 为坐标原点，AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的棱长为 1，



则 $B(1,0,0),E\left(0,1,\frac{1}{2}\right),D_1(0,1,1),C_1(1,1,1)$，$A_1(0,0,1)$，可得 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1),\overrightarrow{BE}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 A_1BE 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+y+\frac{z}{2}=0\end{cases}$，

令 $z=2$，则 $x=2,y=1$，即 $\vec{n}=(2,1,2)$，

由 $\overrightarrow{D_1C_1}=(1,0,0)$，且 $\overrightarrow{D_1F}=\lambda\overrightarrow{D_1C_1}$，可得 $F(\lambda,1,1)(0\le\lambda\le1)$，

又因为 $B_1(1,0,1)$，则 $\overrightarrow{B_1F}=(\lambda-1,1,0)$，

由 B_1F // 平面 A_1BE，可得 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1F}=2(\lambda-1)+1\times1+2\times0=0$，

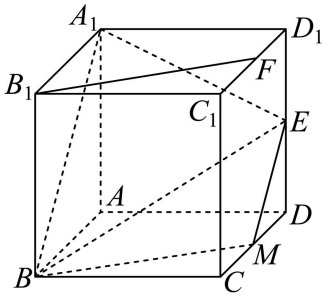
解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

解法二：如图，取 CD 中点 M，连接 BM,EM，易证 $A_1B\ //\ EM$，

所以平面 A_1BE 即为平面 A_1BME，

易知当 F 为 C_1D_1 的中点时，B_1F // BM，$B_1F\not\subset$ 平面 A_1BE，$BM\subset$ 平面 A_1BE，

从而 B_1F // 平面 A_1BE，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.



故选：C.

8．A

【分析】以“宫”的顺序将音阶排序分为四类，再考虑“商”“角”顺序，运用排列组合知识可得答案.

【详解】①若“宫”为首音阶，“商”“角”可取 $24,25,35$ 音阶，

排成的音序有 $C_3^1A_2^2A_2^2=12$ 种；

②若“宫”为第 2 音阶，“商”“角”可取 $13,14,15,35$ 音阶，

排成的音序有 $C_3^1A_2^2A_2^2+A_2^2=14$ 种；

③若“宫”为第 3 音阶，“商”“角”可取 14，15，24，25 音阶，

排成的音序有 $C_2^1A_2^2A_2^2+C_2^1A_2^2=12$ 种；

④若“宫”为第 4 音阶，“商”“角”可取 13，15，25，35 音阶，

排成的音序有 $C_2^1A_2^2A_2^2+C_2^1A_2^2=12$ 种.

由分类加法计数原理可知，一共有 $12+14+12+12=50$ 种排法.

故选：A.

9．BCD

【分析】根据第 3 项和第 4 项的二项式系数最大得出 n 即可判断 A;应用赋值法求各项系数和 243 判断 B;应用二项式系数和为 2^n 及奇数项和偶数项的二项式系数和相等判断 C；应用通项公式计算常数项得出 $r=\frac{10}{3}$ 判断 D.

【详解】A 项，在 $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式中第 3 项和第 4 项的二项式系数最大，

$C_n^2=C_n^3$ 是展开式的中间两项的二项式系数，

则n为奇数，且$C_n^{\frac{n-1}{2}}$与$C_n^{\frac{n+1}{2}}$最大，

所以$\frac{n+1}{2}=3$，解得$n=5$，A 项错误；

B 项，在$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$中，令$x=1$，得$\left(1+\frac{2}{\sqrt{1}}\right)^5=3^5=243$，故展开式的各项系数和为 243，B 项正确；

C 项，在$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式中的二项式系数和为$2^5=32$，其中奇数项和偶数项的二项式系数和相等，所以展开式中奇数项的二项式系数和为 16，C 项正确；

D 项，$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot 2^r x^{-\frac{r}{2}}=C_5^r\cdot 2^r x^{5-\frac{3r}{2}},0\le r\le 5$，且$r$为整数，

令$5-\frac{3}{2}r=0$，解得$r=\frac{10}{3}$，不满足要求，所以展开式中不含常数项，D 项正确.

故选：BCD.

10．ABD

【分析】根据单位向量的定义即可判断 A；根据投影向量的定义即可判断 B；根据夹角的坐标公式即可判断 C；先求出原点$O(0,0,0)$到平面ABC的距离，进而可判断 D.

【详解】$\overrightarrow{AB}=(0,2,-1),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{BC}=(-2,0,1)$，

对于 A，与向量$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量是$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，故 A 正确；

对于 B，$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量是$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4(-2,2,0)}{2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=(-1,1,0)$，故 B 正确；

对于 C，$\cos\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{1}{5}$，故 C 错误；

对于 D，设平面ABC的法向量是$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y-z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$，令$x=1$，可得$y=1,z=2$，

所以平面ABC的一个法向量是$\vec{n}=(1,1,2)$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/657105066154010011