

上海市格致初级中学 2024 届高三第三次测评数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1+i)z = |3+4i|$ ，则 z 的虚部为（ ）

- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. -5

2. 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中的常数项是()

- A. 180 B. 90 C. 45 D. 360

3. 设曲线 $y = a(x-1) - \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = 3x - 3$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

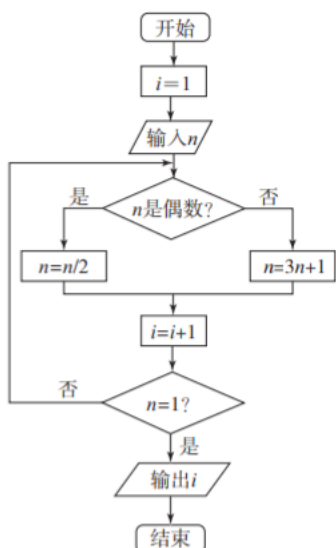
4. 胡夫金字塔是底面为正方形的锥体，四个侧面都是相同的等腰三角形。研究发现，该金字塔底面周长除以 2 倍的塔高，恰好为祖冲之发现的密率 $\frac{355}{113} \approx \pi$ 。设胡夫金字塔的高为 h ，假如对胡夫金字塔进行亮化，沿其侧棱和底边布设单条灯带，则需要灯带的总长度约为

- A. $(4\pi + \frac{\sqrt{2\pi^2 + 4}}{2})h$ B. $(2\pi + \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4})h$
- C. $(8\pi + 4\sqrt{2\pi^2 + 1})h$ D. $(2\pi + \sqrt{2\pi^2 + 16})h$

5. 已知复数 $z = \frac{(2+ai)i}{1-i}$ 是纯虚数，其中 a 是实数，则 z 等于（ ）

- A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

6. “角谷猜想”的内容是：对于任意一个大于 1 的整数 n ，如果 n 为偶数就除以 2，如果 n 是奇数，就将其乘 3 再加 1，执行如图所示的程序框图，若输入 $n = 10$ ，则输出 i 的（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

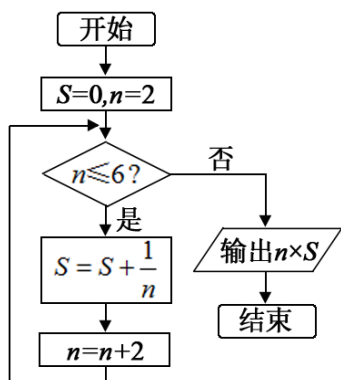
7. 某工厂利用随机数表示对生产的 600 个零件进行抽样测试，先将 600 个零件进行编号，编号分别为 001, 002, …, 599, 600. 从中抽取 60 个样本，下图提供随机数表的第 4 行到第 6 行：

32 21 18 34 29 78 64 54 07 32 52 42 06 44 38 12 23 43 56 77 35 78 90 56 42
 84 42 12 53 31 34 57 86 07 36 25 30 07 32 86 23 45 78 89 07 23 68 96 08 04
 32 56 78 08 43 67 89 53 55 77 34 89 94 83 75 22 53 55 78 32 45 77 89 23 45

若从表中第 6 行第 6 列开始向右读取数据，则得到的第 6 个样本编号是 ()

- A. 324 B. 522 C. 535 D. 578

8. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为 ()



- A. $\frac{11}{12}$ B. 6 C. $\frac{11}{2}$ D. $\frac{22}{3}$

9. 若 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z=3x+2y$ 的最大值为 ()

- A. 5 B. 9 C. 6 D. 12

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立, 已知

$$a = f(\ln \pi), b = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), c = f\left(\log_2 \frac{1}{6}\right), \text{ 则 } a, b, c \text{ 的大小关系为 ()}$$

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_3 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = ()$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\log_3 2$ D. $\log_3 2$

12. 设复数 z 满足 $|z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1$, z 在复平面内对应的点的坐标为 (x, y) 则 ()

- A. $x^2 = 2y + 1$ B. $y^2 = 2x + 1$
C. $x^2 = 2y - 1$ D. $y^2 = 2x - 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \cos x - \log_2(2^x + 1) + ax (a \in \mathbf{R})$ 为偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

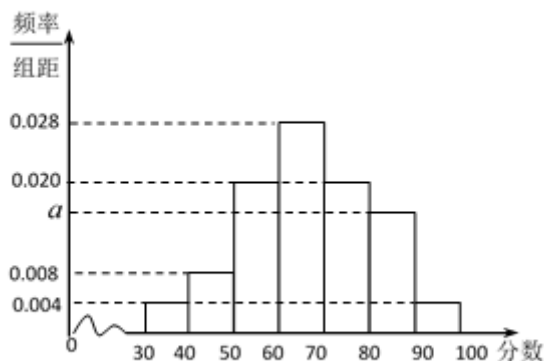
14. 若 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大, 则展开式中各项的系数和是 .

15. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ 是平面向量, $\vec{e}$ 是单位向量. 若 $\vec{a} \cdot \vec{e} = 2, \vec{b} \cdot \vec{e} = 3$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的取值范围是 .

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos C = b \cos C + c \cos B$, 则 $C = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 改革开放 40 年, 我国经济取得飞速发展, 城市汽车保有量在不断增加, 人们的交通安全意识也需要不断加强. 为了解某城市不同性别驾驶员的交通安全意识, 某小组利用假期进行一次全市驾驶员交通安全意识调查. 随机抽取男女驾驶员各 50 人, 进行问卷测评, 所得分数的频率分布直方图如图所示. 规定得分在 80 分以上为交通安全意识强.



	安全意识强	安全意识不强	合计
男性			
女性			
合计			

- (Ⅰ) 求 a 的值，并估计该城市驾驶员交通安全意识强的概率；
- (Ⅱ) 已知交通安全意识强的样本中男女比例为 4:1，完成 2×2 列联表，并判断有多大把握认为交通安全意识与性别有关；
- (Ⅲ) 在 (Ⅱ) 的条件下，从交通安全意识强的驾驶员中随机抽取 2 人，求抽到的女性人数 X 的分布列及期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$

$P(K^2 \geq k)$	0.010	0.005	0.001
k	6.635	7.879	10.828

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为：

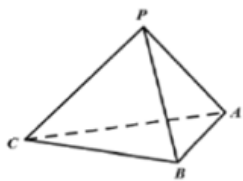
$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$ ，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + a, \\ y = a - t, \end{cases}$ 其中 $t \in \mathbf{R}$ ， t 为参数， a 为常数.

- (1) 写出 C_1 与 C_2 的直角坐标方程；
- (2) a 在什么范围内取值时， C_1 与 C_2 有交点.

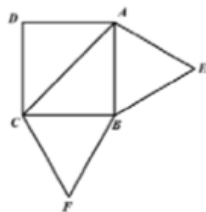
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，其中 $x \in \mathbf{R}$ ， $\omega > 0$.

- (1) 当 $\omega = 1$ 时，求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值；
- (2) 当 $f(x)$ 的最小正周期为 π 时，求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

20. (12 分) 已知三棱锥 $P-ABC$ (如图一) 的平面展开图 (如图二) 中，四边形 $ABCD$ 为边长等于 $\sqrt{2}$ 的正方形， $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形，在三棱锥 $P-ABC$ 中：



图一



图二

(1) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；

(2) 若点 M 在棱 PA 上运动，当直线 BM 与平面 PAC 所成的角最大时，求直线 MA 与平面 MBC 所成角的正弦值.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足 $\sqrt{3}a = \sqrt{3}b \cos C - c \sin B$.

(1) 求 B ；

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$ ， AD 为 BC 边上的中线，当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时，求 AD 的长.

22. (10 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ， M 为椭圆 C 上任意一点，且 $|MF_1| + |MF_2| = 4$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若直线 $l: y = kx + m (k > 0, m > 0)$ 交椭圆 C 于 P, Q 两点，且满足 $k_{PQ}^2 = k_{OP} \cdot k_{OQ}$ (k_{PQ}, k_{OP}, k_{OQ} 分别为直线 PQ, OP, OQ 的斜率)，求 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时直线 PQ 的方程.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

由 $(1+i)z = |3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$$\text{得 } z = \frac{5}{1+i} = \frac{5(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$\therefore z \text{ 的虚部为 } -\frac{5}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

2、A

【解析】

试题分析：因为 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，所以 $n=10$ ，

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (\sqrt{x})^{10-r} \cdot (\frac{2}{x^2})^r = 2^r C_{10}^r x^{5-\frac{5}{2}r}, \text{ 令 } 5 - \frac{5}{2}r = 0, \text{ 则 } r = 2, T_3 = 4C_{10}^2 = 180.$$

考点：1.二项式定理；2.组合数的计算.

3、D

【解析】

利用导数的几何意义得直线的斜率，列出 a 的方程即可求解

【详解】

因为 $y' = a - \frac{1}{x}$ ，且在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率为 3，所以 $a - 1 = 3$ ，即 $a = 4$.

故选：D

【点睛】

本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力，是基础题

4、D

【解析】

设胡夫金字塔的底面边长为 a ，由题可得 $\frac{4a}{2h} = \pi$ ，所以 $a = \frac{\pi h}{2}$ ，

$$\text{该金字塔的侧棱长为 } \sqrt{h^2 + (\frac{\sqrt{2}a}{2})^2} = \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 h^2}{8}} = \frac{h\sqrt{2\pi^2 + 16}}{4},$$

$$\text{所以需要灯带的总长度约为 } 4 \times \frac{h\sqrt{2\pi^2 + 16}}{4} + 4 \times \frac{\pi h}{2} = (2\pi + \sqrt{2\pi^2 + 16})h, \text{ 故选 D.}$$

5、A

【解析】

对复数 z 进行化简，由于 z 为纯虚数，则化简后的复数形式中，实部为 0，得到 a 的值，从而得到复数 z 。

【详解】

$$z = \frac{(2+ai)i}{1-i} = \frac{-a+2i}{1+i} = \frac{(-a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-a}{2} + \frac{a+2}{2}i$$

因为 z 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{2} = 0$ ，得 $a = 2$

所以 $z = 2i$ 。

故选 A 项

【点睛】

本题考查复数的四则运算，纯虚数的概念，属于简单题。

6、B

【解析】

模拟程序运行，观察变量值可得结论。

【详解】

循环前 $i = 1, n = 10$ ，循环时： $n = 5, i = 2$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 16, i = 3$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 8, i = 4$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 4, i = 5$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 2, i = 6$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 1, i = 7$ ，满足条件 $n = 1$ ，退出循环，输出 $i = 7$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查程序框图，考查循环结构，解题时可模拟程序运行，观察变量值，从而得出结论。

7、D

【解析】

因为要对 600 个零件进行编号，所以编号必须是三位数，因此按要求从第 6 行第 6 列开始向右读取数据，大于 600 的，重复出现的舍去，直至得到第六个编号。

【详解】

从第 6 行第 6 列开始向右读取数据，编号内的数据依次为：

436, 535, 577, 348, 522, 535, 578, 324, 577, L，因为 535 重复出现，所以符合要求的数据依次为

436, 535, 577, 348, 522, 578, 324, L，故第 6 个数据为 578. 选 D.

【点睛】

本题考查了随机数表表的应用，正确掌握随机数表法的使用方法是解题的关键。

8、D

【解析】

用列举法,通过循环过程直接得出 S 与 n 的值,得到 $n=8$ 时退出循环,即可求得.

【详解】

执行程序框图,可得 $S=0$, $n=2$, 满足条件, $S=\frac{1}{2}$, $n=4$, 满足条件, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $n=6$, 满足条件, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$, $n=8$, 由题意,此时应该不满足条件,退出循环,输出 S 的值为 $\frac{11}{12} \times 8 = \frac{22}{3}$.

故选 D.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的应用,正确依次写出每次循环得到的 S 与 n 的值是解题的关键,难度较易.

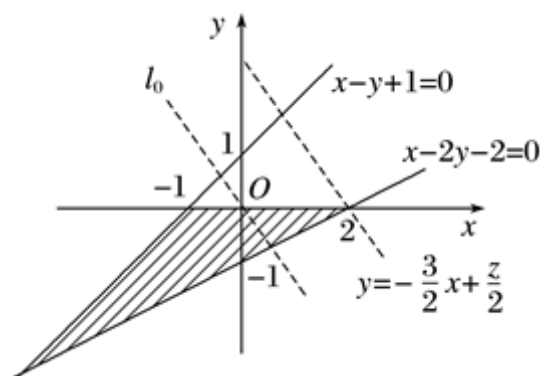
9、C

【解析】

作出不等式组所表示的可行域,平移直线 $z=3x+2y$,找出直线在 y 轴上的截距最大时对应的最优解,代入目标函数计算即可.

【详解】

作出满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ 的可行域如图阴影部分(包括边界)所示.



由 $z=3x+2y$, 得 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$, 平移直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$, 当直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$ 经过点 $(2,0)$ 时, 该直线在 y 轴上的截距最大, 此时 z 取最大值,

即 $z_{\max} = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$.

故选: C.

【点睛】

本题考查简单的线性规划问题,考查线性目标函数的最值,一般利用平移直线的方法找到最优解,考查数形结合思想的应用,属于基础题.

10、A

【解析】

根据偶函数的性质和单调性即可判断.

【详解】

解: 对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

$f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 上递增

因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上递减

又因为 $\left| \log_2 \frac{1}{6} \right| = \log_2 6 > 2$, $1 < \ln \pi < 2$, $0 < e^{-\frac{1}{2}} < 1$

所以 $b > a > c$

故选: A

【点睛】

考查偶函数的性质以及单调性的应用, 基础题.

11、A

【解析】

根据分段函数解析式, 先求得 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 的值, 再求得 $f\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ 的值.

【详解】

依题意 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, $f\left(f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查根据分段函数解析式求函数值, 属于基础题.

12、B

【解析】

根据共轭复数定义及复数模的求法, 代入化简即可求解.

【详解】

z 在复平面内对应的点的坐标为 (x, y) , 则 $z = x + yi$,

$$\bar{z} = x - yi,$$

$$\therefore |z| = \frac{z + \bar{z}}{2} + 1,$$

$$\text{代入可得 } \sqrt{x^2 + y^2} = x + 1,$$

$$\text{解得 } y^2 = 2x + 1.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查复数对应点坐标的几何意义，复数模的求法及共轭复数的概念，属于基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

$$13、\frac{1}{2}$$

【解析】

根据偶函数的定义列方程，化简求得 a 的值.

【详解】

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$ ，

$$\text{即 } \cos(-x) - \log_2(2^{-x} + 1) - ax = \cos x - \log_2(2^x + 1) + ax,$$

$$\text{即 } \cos x - \log_2(2^{-x} + 1) - ax = \cos x - \log_2(2^x + 1) + ax,$$

$$\text{即 } \log_2(2^x + 1) - \log_2(2^{-x} + 1) - 2ax = 0,$$

$$\text{即 } \log_2 \frac{2^x + 1}{2^{-x} + 1} - 2ax = 0, \text{ 即 } \log_2 \frac{(2^x + 1) \cdot 2^x}{(2^{-x} + 1) \cdot 2^x} - 2ax = 0, \text{ 即 } \log_2 \frac{(2^x + 1) \cdot 2^x}{2^x + 1} - 2ax = 0, \text{ 即}$$

$$\log_2 2^x - 2ax = x - 2ax = (1 - 2a)x = 0, \text{ 所以 } 1 - 2a = 0, a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2}$$

【点睛】

本小题主要考查根据函数的奇偶性求参数，考查运算求解能力，属于中档题.

$$14、1$$

【解析】

由题意得出展开式中共有 11 项， $n = 10$ ；再令 $x = 1$ 求得展开式中各项的系数和.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/657111056061006120>