湖南省岳阳市岳阳县第一中学2024年高考冲刺押题（最后一卷）数学试卷

注意事项

1．考生要认真填写考场号和座位序号。

2．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。

3．考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．我国宋代数学家秦九韶（**1202-1261**）在《数书九章》（**1247**）一书中提出“三斜求积术”，即：以少广求之，以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积. 其实质是根据三角形的三边长a，b，c求三角形面积S，即$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$. 若$\Delta ABC$的面积$S=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，$b=2$，则$\sin A$等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{55}}{10}$　　**B.** $\frac{\sqrt{11}}{6}$　　**C.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$或$\frac{\sqrt{11}}{6}$　　**D.** $\frac{11}{20}$或$\frac{11}{36}$

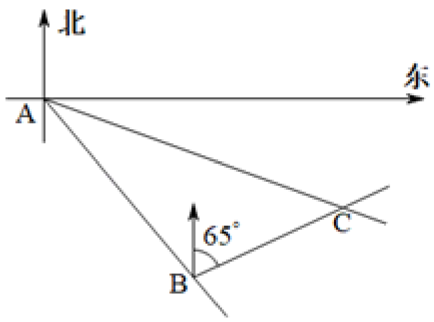
2．已知函数$f(x)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right),x\in\left[0,\frac{13}{3}\pi\right]$，若函数$F(x)=f(x)-3$的所有零点依次记为$x_1,x_2,x_3,...,x_n$，且$x_1<x_2<x_3<...<x_n$，则$x_1+2x_2+2x_3+...+2x_{n-1}+x_n=$（　　）

A. $\frac{50\pi}{3}$　　**B.** 21π　　**C.** $\frac{100\pi}{3}$　　**D.** 42π

3．已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上,$PA\perp$平面ABC,ΔABC是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形,若球O的表面积为20π,则直线PC与平面PAB所成角的正切值为(　　)

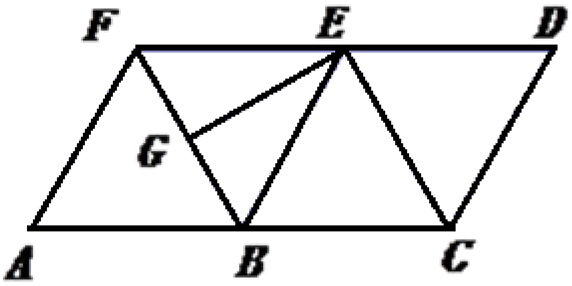
A. $\frac{3}{4}$　　**B.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　**C.** $\frac{3}{7}\sqrt{7}$　　**D.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$

4．一艘海轮从 ***A*** 处出发，以每小时 **24** 海里的速度沿南偏东 **40°**的方向直线航行，**30** 分钟后到达 ***B*** 处，在 ***C*** 处有一座灯塔，海轮在 ***A*** 处观察灯塔，其方向是南偏东 **70°**，在 ***B*** 处观察灯塔，其方向是北偏东 **65°**，那么 ***B***，***C*** 两点间的距离是（　　）



A．6 $\sqrt{2}$ 海里　　**B**．6$\sqrt{3}$ 海里　　**C**．8$\sqrt{2}$ 海里　　**D**．8$\sqrt{3}$ 海里

5．下图为一个正四面体的侧面展开图，G 为 BF 的中点，则在原正四面体中，直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　**B**．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

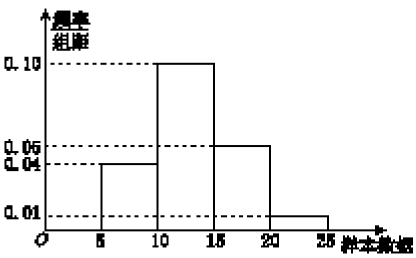
C．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　**D**．$\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

6．若函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(x+2\theta\right)\cdot\cos x$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）的图象过点$\left(0,2\right)$，则（　　）

A．函数 $y=f\left(x\right)$ 的值域是$\left[0,2\right]$　　**B**．点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$是 $y=f\left(x\right)$ 的一个对称中心

C．函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期是 2π　　**D**．直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 是 $y=f\left(x\right)$ 的一条对称轴

7．某个小区住户共 **200** 户，为调查小区居民的 **7** 月份用水量，用分层抽样的方法抽取了 **50** 户进行调查，得到本月的用水量(单位：m^3)的频率分布直方图如图所示，则小区内用水量超过 **15** m^3 的住户的户数为( )



A．10　　**B**．50　　**C**．60　　**D**．140

8．正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=\sqrt{2}AB$，D 是 BC 的中点，则异面直线 AD 与 A_1C 所成的角为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　**B**．$\dfrac{\pi}{4}$　　**C**．$\dfrac{\pi}{3}$　　**D**．$\dfrac{\pi}{2}$

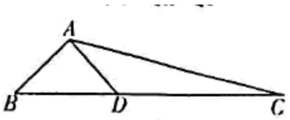
9．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 ***F***，左顶点为 ***A***，点 ***P*** 椭圆上，且 $PF\perp AF$，若 $\tan\angle PAF=\dfrac{1}{2}$，则椭圆的离心率 e 为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

10．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$，则抛物线的标准方程为（　）

A. $y^2=x$　　B. $y^2=2x$　　C. $y^2=4x$　　D. $y^2=8x$

11．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB, \overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in R), \left|\overrightarrow{AD}\right|=2$，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=12$，则 $2x+y=$（　　）



A. 1　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

12．下列命题为真命题的个数是（　　）（其中 π，e 为无理数）

①$\sqrt{e}>\frac{3}{2}$；②$\ln\pi<\frac{2}{3}$；③$\ln 3<\frac{3}{e}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上.若球 O 的表面积为 28π,则该三棱柱的侧面积为__________.

14．在 $(1+ax)^2(1-x)^5$ 的展开式中，所有 x 的奇数次幂项的系数和为-64，则实数 a 的值为__________.

15．在回归分析的问题中，我们可以通过对数变换把非线性回归方程 $y=c_1e^{c_2x}$，（$c_1>0$）转化为线性回归方程，即两边取对数，令 $z=\ln y$，得到 $z=c_2x+\ln c_1$.受其启发，可求得函数 $y=x^{\log_3(9x)}$（$x>0$）的值域是_________.

16．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $B=\frac{\pi}{3},a=2,b=\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为___________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-x^2+2a+b$（$x\in\mathbf{R}$）的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$（e 为自然对数的底数）

（1）求 a,b 的值；

（2）若 $k\in Z$，且 $f(x)+\frac{1}{2}(3x^2-5x-2k)\geq 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 k 的最大值.

18．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，将曲线 $C_1:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）通过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x\\ y'=y\end{cases}$，得到曲线 C_2，设直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数)与曲线 C_2 相交于不同两点 A，B.

（1）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，求线段 AB 的中点 M 的坐标；

（2）设点 $P\left(2,\sqrt{3}\right)$，若 $|PA|\cdot|PB|=|OP|^2$，求直线 l 的斜率.

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x}$，$g\left(x\right)=m\left(x-1\right)-2\ln x$.

（1）求证：当 $x\in\left(0,\pi\right]$ 时，$f\left(x\right)<1$；

（2）若对任意 $x_0\in\left(0,\pi\right]$ 存在 $x_1\in\left(0,\pi\right]$ 和 $x_2\in\left(0,\pi\right](x_1\neq x_2)$ 使 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=f\left(x_0\right)$ 成立，求实数 m 的最小值.

20.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x$.

（1）求函数 $y=f\left(x\right)$ 的最小正周期以及单调递增区间；

（2）已知 ΔABC，若 $f\left(C\right)=1$，$c=2$，$\sin C+\sin\left(B-A\right)=2\sin 2A$，求 ΔABC 的面积.

21.（12 分）一个工厂在某年里连续 **10** 个月每月产品的总成本 y（万元）与该月产量 x（万件）之间有如下一组数据：

x	1.08	1.12	1.19	1.28	1.36	1.48	1.59	1.68	1.80	1.87
y	2.25	2.37	2.40	2.55	2.64	2.75	2.92	3.03	3.14	3.26

（1）通过画散点图，发现可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请用相关系数 r 加以说明；

（2）①建立月总成本 y 与月产量 x 之间的回归方程；②通过建立的 y 关于 x 的回归方程，估计某月产量为 **1.98** 万件时，产品的总成本为多少万元？（均精确到 **0.001**）

附注：①参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=14.45$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=27.31$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}\approx 0.850$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2}\approx 1.042$，$\hat{b}=1.223$.

②参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

22.（10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+4=0$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）若点 P 在曲线 C_1 上，点 Q 在曲线 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时点 P 的坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

将$S=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，$b=2$，代入$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，解得$c^2=5,c^2=9$，再分类讨论，利用余弦弦定理求$\cos A$，再用平方关系求解.

【详解】

已知$S=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，$b=2$，

代入$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，

得$\sqrt{\frac{1}{4}[3c^2-(\frac{c^2+3-4}{2})^2]}=\frac{\sqrt{11}}{2}$，

即$c^4-12c^2+45=0$，

解得$c^2=5,c^2=9$，

当$c^2=5$时，由余弦弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

当$c^2=9$时，由余弦弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5}{6}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{11}{6}$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查余弦定理和平方关系，还考查了对数学史的理解能力，属于基础题.

2、**C**

【解析】

令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$，求出在 $\left[0,\frac{13}{3}\pi\right]$ 的对称轴，由三角函数的对称性可得

$x_1+x_2=\dfrac{\pi}{3}\times 2,x_2+x_3=\dfrac{5\pi}{6}\times 2,\ldots,x_{n-1}+x_n=\dfrac{23\pi}{6}\times 2$，将式子相加并整理即可求得 $x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_{n-1}+x_n$ 的值.

【详解】

令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$，得 $x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{3}\left(k\in Z\right)$，即对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{3}\left(k\in Z\right)$.

函数周期 $T=\pi$，令 $\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{13}{3}\pi$，可得 $k=8$.则函数在 $x\in\left[0,\dfrac{13}{3}\pi\right]$ 上有 **8** 条对称轴.

根据正弦函数的性质可知 $x_1+x_2=\dfrac{\pi}{3}\times 2,x_2+x_3=\dfrac{5\pi}{6}\times 2,\ldots,x_{n-1}+x_n=\dfrac{23\pi}{6}\times 2$，

将以上各式相加得：$x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_{n-1}+x_n=\left(\dfrac{2\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{8\pi}{6}+\ldots+\dfrac{23\pi}{6}\right)\times 2=\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{\left(2+23\right)\times 8}{2}=\dfrac{100\pi}{3}$

故选:C.

【点睛】

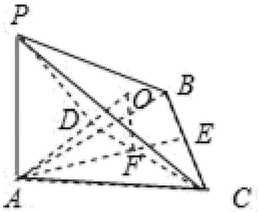
本题考查了三角函数的对称性，考查了三角函数的周期性，考查了等差数列求和.本题的难点是将所求的式子拆分为 $x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_4+\ldots+x_{n-1}+x_n$ 的形式.

3、C

【解析】

设 D 为 AB 中点,先证明 $CD\perp$ 平面 PAB，得出 $\angle CPD$ 为所求角,利用勾股定理计算 PA,PD,CD ,得出结论.

【详解】



设 D,E 分别是 AB,BC 的中点 $AE\cap CD=F$

$\because PA\perp$ 平面 ABC　　$\therefore PA\perp CD$

$\because\Delta ABC$ 是等边三角形　　$\therefore CD\perp AB$

又 $PA\cap AB=A$

$\therefore CD\perp$ 平面 PAB　　$\therefore\angle CPD$ 为 PC 与平面 PAB 所成的角

$\because\Delta ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形

$\therefore CD=AE=3$，$AF=\dfrac{2}{3}AE=2$ 且 F 为 ΔABC 所在截面圆的圆心

$\because$ 球 O 的表面积为 20π　　$\therefore$ 球 O 的半径 $OA=\sqrt{5}$

$\therefore OF=\sqrt{OA^2-AF^2}=1$

Q $PA\perp$ 平面 ABC　　$\therefore PA=2OF=2$

$\therefore PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{7}$

$\therefore \tan\angle CPD=\dfrac{CD}{PD}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查了棱锥与外接球的位置关系问题，关键是能够通过垂直关系得到直线与平面所求角，再利用球心位置来求解出线段长，属于中档题.

4、A

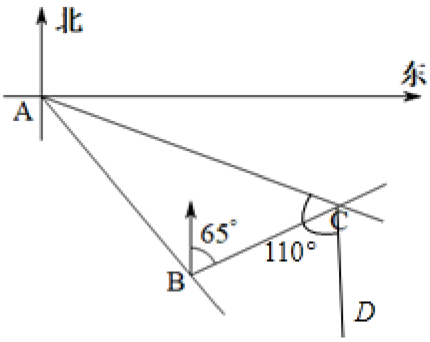
【解析】

先根据给的条件求出三角形 ABC 的三个内角，再结合 AB 可求，应用正弦定理即可求解.

【详解】

由题意可知：$\angle BAC$＝70°﹣ 40°＝30°.$\angle ACD$＝110°，∴$\angle ACB$＝110°﹣ 65°＝45°，

∴$\angle ABC$＝180°﹣ 30°﹣ 45°＝105°.又 AB＝24×0.5＝12.



在△ABC 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{sin45^\circ}=\dfrac{BC}{sin30^\circ}$，

即 $\dfrac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{BC}{\frac{1}{2}}$，$\therefore BC=6\sqrt{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查正弦定理的实际应用，关键是将给的角度、线段长度转化为三角形的边角关系，利用正余弦定理求解.属于中档题.

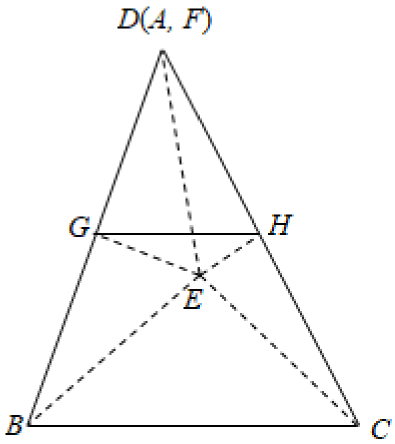
5、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体，A,D,F 三点重合，记作 D，取 DC 中点 H，连接 EG,EH,GH，$\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos\angle EGH$.

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A,D,F 三点重合，记作 D：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H，连接 EG,EH,GH，设正四面体的棱长均为 a，

由中位线定理可得 $GH//BC$ 且 $GH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，

$$EG=EH=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\ ,$$

由余弦定理可得 $\cos\angle EGH=\dfrac{EG^2+GH^2-EH^2}{2EG\cdot GH}$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

6、**A**

【解析】

根据函数 $f\left(x\right)$ 的图像过点 $\left(0,2\right)$，求出 θ，可得 $f\left(x\right)=\cos 2x+1$，再利用余弦函数的图像与性质，得出结论.

【详解】

由函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(x+2\theta\right)\cdot\cos x$ （$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）的图象过点 $\left(0,2\right)$，

可得 $2\sin 2\theta=2$，即 $\sin 2\theta=1$，

$\therefore 2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

故 $f\left(x\right)=2\sin\left(x+2\theta\right)\cdot\cos x=2\cos^2 x=\cos 2x+1$，

对于 **A**，由 $-1\le\cos 2x\le 1$，则 $0\le f\left(x\right)\le 2$，故 **A** 正确；

对于 **B**，当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，故 **B** 错误；

对于 **C**，$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 **C** 错误；

对于 **D**，当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，故 **D** 错误；

故选：**A**

【点睛】

本题主要考查了二倍角的余弦公式、三角函数的图像与性质，需熟记性质与公式，属于基础题.

7、C

【解析】

从频率分布直方图可知，用水量超过 **15m³**的住户的频率为 $(0.05+0.01)\times 5=0.3$，即分层抽样的 **50** 户中有 **0.3×50=15** 户住户的用水量超过 **15** 立方米

所以小区内用水量超过 **15** 立方米的住户户数为 $\dfrac{15}{50}\times 200=60$，故选 **C**

8、C

【解析】

取 B_1C_1 中点 E，连接 A_1E，CE，根据正棱柱的结构性质，得出 $A_1E\,//\,AD$，则 $\angle CA_1E$ 即为异面直线 AD 与 A_1C 所成角，求出 $\tan\angle CA_1E=\dfrac{CE}{A_1E}$，即可得出结果.

【详解】

解：如图，取 B_1C_1 中点 E，连接 A_1E，CE，