

2023-2024 学年广东信宜市高三第二学期数学试题统练 (8)

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 用电脑每次可以从区间 $(0, 3)$ 内自动生成一个实数, 且每次生成每个实数都是等可能性的. 若用该电脑连续生成 3 个实数, 则这 3 个实数都小于 1 的概率为 ()

A. $\frac{4}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{1}{9}$

2. 在 $(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 ()

A. -120 B. 120 C. -15 D. 15

3. 若复数 $m(m-2) + (m^2 - 3m + 2)i$ 是纯虚数, 则实数 m 的值为 ()

A. 0 或 2 B. 2 C. 0 D. 1 或 2

4. 2019 年 10 月 17 日是我国第 6 个“扶贫日”, 某医院开展扶贫日“送医下乡”医疗义诊活动, 现有五名医生被分配到四所不同的乡镇医院中, 医生甲被指定分配到医院 A, 医生乙只能分配到医院 A 或医院 B, 医生丙不能分配到医生甲、乙所在的医院, 其他两名医生分配到哪所医院都可以, 若每所医院至少分配一名医生, 则不同的分配方案共有 ()

A. 18 种 B. 20 种 C. 22 种 D. 24 种

5. 已知 $a > 0, f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0), A = \{x | f(x) \leq x\}, B = \{x | f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9, \sin B = \cos A \sin C, S_{\triangle ABC} = 6, P$ 为线段 AB 上的一点, 且

$\overrightarrow{CP} = x \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + y \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

7. 若函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 7$ 有且仅有一个零点, 则实数 m 的值为 ()

- A. $\frac{-3-\sqrt{37}}{2}$ B. $\frac{-3+\sqrt{37}}{2}$ C. -4 D. 2

8. 自 2019 年 12 月以来,在湖北省武汉市发现多起病毒性肺炎病例,研究表明,该新型冠状病毒具有很强的传染性各级政府反应迅速,采取了有效的防控阻击措施,把疫情控制在最低范围之内.某社区按上级要求做好在鄂返乡人员体格检查登记,有 3 个不同的住户属在鄂返乡住户,负责该小区体格检查的社区诊所共有 4 名医生,现要求这 4 名医生都要分配出去,且每个住户家里都要有医生去检查登记,则不同的分配方案共有 ()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 72 种

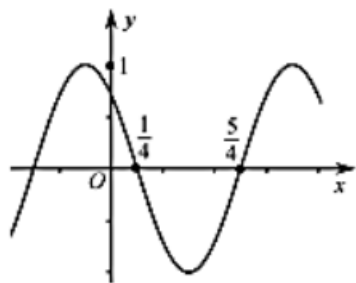
9. 点 P 为棱长是 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点,点 M 为 B_1C_1 的中点,若满足 $DP \perp BM$, 则动点 P 的轨迹的长度为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$

10. 若集合 $M=\{1, 3\}$, $N=\{1, 3, 5\}$, 则满足 $M \cup X = N$ 的集合 X 的个数为()

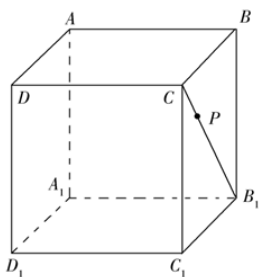
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

11. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示,则 $f(x)$ 的单调递增区间为 ()



- A. $\left[-\frac{5}{4} + k\pi, -\frac{1}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ B. $\left[-\frac{5}{4} + 2k\pi, -\frac{1}{4} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
C. $\left[-\frac{5}{4} + k, -\frac{1}{4} + k\right], k \in \mathbb{Z}$ D. $\left[-\frac{5}{4} + 2k, -\frac{1}{4} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$

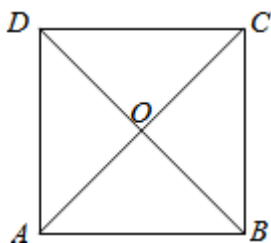
12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在线段 CB_1 上, 且 $B_1P = 2PC$, 平面 α 经过点 A, P, C_1 , 则正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为 ()



- A. $3\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图所示，在边长为 4 的正方形纸片 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于 O . 剪去 $\triangle AOB$ ，将剩余部分沿 OC ， OD 折叠，使 OA 、 OB 重合，则以 $A(B)$ 、 C 、 D 、 O 为顶点的四面体的外接球的体积为_____.



14. $(3x^2 - 2x - 1)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是_____. (用数字填写答案)

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2(a_n + 1)$ ，则满足 $S_n = -126$ 的正整数 n 的值为_____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的一条准线与两条渐近线所围成的三角形的面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C: y^2 - 4x - 4 = 0$ ，以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) .

(1) 求抛物线 C 的极坐标方程；

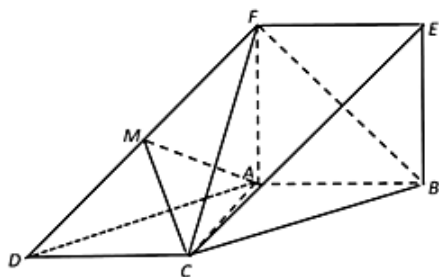
(2) 若抛物线 C 与直线 l 交于 A ， B 两点，求 $|AB|$ 的值.

18. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列， $a_1 = 1$ ，且 $2a_2$ 、 $\frac{3}{2}a_3$ 、 a_4 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+3}}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分) 如图，在三棱柱 $ADF - BCE$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ，侧面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $ABEF$ 为正方形， $AC \perp AB$ ， $AC = 2AB = 4$ ， M 为 FD 的中点.



- (1) 求证: $FB \parallel$ 平面 ACM ;
 (2) 求二面角 $M-AC-F$ 的大小.

20. (12 分) 已知 q, n 均为给定的大于 1 的自然数, 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $T = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.

(I) 当 $q = 2, n = 2$ 时, 用列举法表示集合 T ;

(II) 当 $q = 200$ 时, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \subseteq M$, 且集合 A 满足下列条件:

① 对任意 $1 \leq i < j \leq 100$, $a_i + a_j \neq 201$;

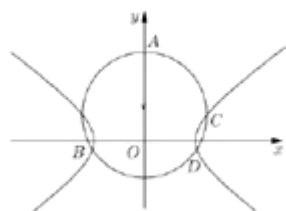
② $\sum_{i=1}^{100} a_i = 12020$.

证明: (i) 若 $\forall a_i \in A$, 则 $201 - a_i \in \bar{A}$ (集合 $\bar{A}$ 为集合 A 在集合 M 中的补集);

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为一个定值 (不必求出此定值);

(III) 设 $s, t \in T$, $s = b_1 + b_2q + b_3q^2 + \dots + b_nq^{n-1}$, $t = c_1 + c_2q + \dots + c_nq^{n-1}$, 其中 $b_i, c_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $b_n < c_n$, 则 $s < t$.

21. (12 分) 如图, 已知圆 $\Gamma_1: x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 (r > 0)$ 和双曲线 $\Gamma_2: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, 记 Γ_1 与 y 轴正半轴、 x 轴负半轴的公共点分别为 A, B , 又记 Γ_1 与 Γ_2 在第一、第四象限的公共点分别为 C, D .



(1) 若 $r = 2$, 且 B 恰为 Γ_2 的左焦点, 求 Γ_2 的两条渐近线的方程;

(2) 若 $r = 2$, 且 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (m, -5)$, 求实数 m 的值;

(3) 若 B 恰为 Γ_2 的左焦点, 求证: 在 x 轴上不存在这样的点 P , 使得 $|PA| - |PC| = 2.019$.

22. (10 分) 设点 $F(1, 0)$, 动圆 P 经过点 F 且和直线 $x = -1$ 相切. 记动圆的圆心 P 的轨迹为曲线 W .

(1) 求曲线 W 的方程;

(2) 过点 $M(0, 2)$ 的直线 l 与曲线 W 交于 A 、 B 两点, 且直线 l 与 x 轴交于点 C , 设 $\vec{MA} = \alpha \vec{AC}$, $\vec{MB} = \beta \vec{BC}$,

求证: $\alpha + \beta$ 为定值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由几何概型的概率计算, 知每次生成一个实数小于 1 的概率为 $\frac{1}{3}$, 结合独立事件发生的概率计算即可.

【详解】

$\therefore$ 每次生成一个实数小于 1 的概率为 $\frac{1}{3}$ $\therefore$ 这 3 个实数都小于 1 的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查独立事件同时发生的概率, 考查学生基本的计算能力, 是一道容易题.

2、C

【解析】

写出 $(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_{10}^r (-\frac{1}{2})^r x^{10-2r}$, 令 $10 - 2r = 4$, 即 $r = 3$, 则可求系数.

【详解】

$(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} (-\frac{1}{2x})^r = C_{10}^r (-\frac{1}{2})^r x^{10-2r}$, 令 $10 - 2r = 4$, 即 $r = 3$ 时, 系数为 $C_{10}^3 (-\frac{1}{2})^3 = -15$. 故选 C

【点睛】

本题考查二项式展开的通项公式, 属基础题.

3、C

【解析】

试题分析：因为复数 $m(m-2) + (m^2 - 3m + 2)i$ 是纯虚数，所以 $m(m-2) = 0$ 且 $m^2 - 3m + 2 \neq 0$ ，因此 $m = 0$. 注意不要忽视虚部不为零这一隐含条件.

考点：纯虚数

4、B

【解析】

分两类：一类是医院 A 只分配 1 人，另一类是医院 A 分配 2 人，分别计算出两类的分配种数，再由加法原理即可得到答案.

【详解】

根据医院 A 的情况分两类：

第一类：若医院 A 只分配 1 人，则乙必在医院 B，当医院 B 只有 1 人，则共有 $C_3^2 A_2^2$ 种不同分配方案，当医院 B 有 2 人，则共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案，所以当医院 A 只分配 1 人时，共有 $C_3^2 A_2^2 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案；

第二类：若医院 A 分配 2 人，当乙在医院 A 时，共有 A_3^3 种不同分配方案，当乙不在 A 医院，在 B 医院时，共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案，所以当医院 A 分配 2 人时，共有 $A_3^3 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案；

共有 20 种不同分配方案.

故选：B

【点睛】

本题考查排列与组合的综合应用，在做此类题时，要做到分类不重不漏，考查学生分类讨论的思想，是一道中档题.

5、C

【解析】

根据 $A \neq \emptyset$ ，得到 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解，则 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$ ，得 $0 < a \leq 1$ ， $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}$ ， $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}$ ，得

到 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ ，再根据 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$ ，有 $f(f(x)) \leq f(x)$ ，

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$ ，可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$ ，根据 $A = B \neq \emptyset$ ，则

$a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}]$ 求解,

【详解】

因为 $A \neq \emptyset$,

所以 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解,

即 $f(x) = ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 有解,

所以 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$, 得 $0 < a \leq 1$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, x_2 = \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$,

所以 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}]$,

又因为 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$,

所以 $f(f(x)) \leq f(x)$,

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$,

可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$,

因为 $A = B \neq \emptyset$,

所以 $a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}]$,

所以 $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a} \leq \frac{-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a} \geq \frac{\sqrt{1-a}}{a}$,

解得 $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$,

故选: C

【点睛】

本题主要考查一元二次不等式的解法及集合的关系的应用, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题,

6、A

【解析】

在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, 结合三角形的内角和及和角的正弦公式化简可求 $\cos C = 0$, 可得

$C = \frac{\pi}{2}$, 再由已知条件求得 $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, 考虑建立以 AC 所在的直线为 x 轴, 以 BC 所在的直线为 y

轴建立直角坐标系，根据已知条件结合向量的坐标运算求得 $4x+3y=12$ ，然后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

【详解】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，

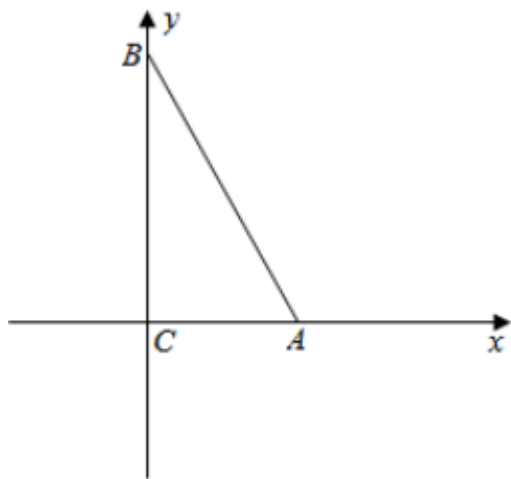
Q $\sin B = \cos A \sin C$ ，即 $\sin(A+C) = \cos A \sin C$ ，即 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \cos A \sin C$ ， $\therefore \sin A \cos C = 0$ ，

Q $0 < A < \pi$ ， $\therefore \sin A > 0$ ， $\therefore \cos C = 0$ ，Q $0 < C < \pi$ ， $\therefore C = \frac{\pi}{2}$ ，

Q $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$ ，即 $cb \cos A = 9$ ，又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6$ ， $\therefore \tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b}$ ，

Q $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 6$ ，则 $ab = 12$ ，所以， $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ ab = 12 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ ， $\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则 $C(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$ ，

P 为线段 AB 上的一点，则存在实数 λ 使得 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} = \lambda(-3, 4) = (-3\lambda, 4\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，

$\therefore \vec{CP} = \vec{CA} + \vec{CB} = (3-3\lambda, 4\lambda)$ ，

设 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}$ ， $\vec{e}_2 = \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$ ，则 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ ， $\therefore \vec{e}_1 = (1, 0)$ ， $\vec{e}_2 = (0, 1)$ ，

Q $\vec{CP} = x \cdot \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} + y \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x, y)$ ， $\therefore \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}$ ，消去 λ 得 $4x+3y=12$ ， $\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ，

所以， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right) = \frac{x}{3y} + \frac{y}{4x} + \frac{7}{12} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{4x}} + \frac{7}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$ ，

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ 时, 等号成立,

因此, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$.

故选: A.

【点睛】

本题是一道构思非常巧妙的试题, 综合考查了三角形的内角和定理、两角和的正弦公式及基本不等式求解最值问题,

解题的关键是理解 $\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$ 是一个单位向量, 从而可用 x 、 y 表示 $\overrightarrow{CP}$, 建立 x 、 y 与参数的关系, 解决本题的第二个关

键点在于由 $x = 3 - 3\lambda$, $y = 4\lambda$ 发现 $4x + 3y = 12$ 为定值, 从而考虑利用基本不等式求解最小值, 考查计算能力, 属于难题.

7、D

【解析】

推导出函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 由题意得出 $f(-1) = 0$, 进而可求得实数 m 的值, 并对 m 的值进行检验, 即可得出结果.

【详解】

$$Q f(x) = (x+1)^2 - m \cos(x+1) + m^2 + 3m - 8,$$

$$\text{则 } f(-1+x) = (-1+x+1)^2 - m \cos(-1+x+1) + m^2 + 3m - 8 = x^2 - m \cos x + m^2 + 3m - 8,$$

$$f(-1-x) = (-1-x+1)^2 - m \cos(-1-x+1) + m^2 + 3m - 8 = x^2 - m \cos x + m^2 + 3m - 8,$$

$\therefore f(-1+x) = f(-1-x)$, 所以, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称.

若函数 $y = f(x)$ 的零点不为 $x = -1$, 则该函数的零点必成对出现, 不合题意.

所以, $f(-1) = 0$, 即 $m^2 + 2m - 8 = 0$, 解得 $m = -4$ 或 2 .

①当 $m = -4$ 时, 令 $f(x) = (x+1)^2 - 4 \cos(x+1) - 4 = 0$, 得 $4 \cos(x+1) = 4 - (x+1)^2$, 作出函数 $y = 4 \cos(x+1)$

与函数 $y = 4 - (x+1)^2$ 的图象如下图所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/658055012030006134>