

高一数学 函数的应用 I 专项突破

一、教学目标：

- 1、了解解实际应用题的一般步骤；
- 2、通过一些函数模型的实例,让学生感受建立函数模型的过程和方法，体会函数在数学和其他学科中的广泛应用；
- 3、进一步认识到函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，能初步运用函数思想解决一些生活中的简单还有哪些不太明白的地方。

二、重点和难点：

- 1、重点：通过对问题的解决与分析，使学生能掌握函数的基础知识和解决问题方法,通过练习加深对知识点的理解；
- 2、难点：函数思想的理解和运用,解决问题能力的培养。



知识点集训

一、函数的应用 I

常见的函数模型有一次函数模型、二次函数模型、指数函数模型、对数函数模型、分段函数模型等. 求解应用性问题时,首先要弄清题意,分清条件和结论,抓住关键词和量,理顺数量关系,然后将文字语言转化成数学语言,建立相应的数学模型.

二、函数零点

- 1、函数零点的概念：对于函数 $y = f(x)(x \in D)$ ，把使 $f(x) = 0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y = f(x)(x \in D)$ 的零点.
- 2、函数零点的意义:函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$

学必求其心得，业必贵于专精

实数根，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标。

即：方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点。

3、函数零点的求法：

①（代数法）求方程 $f(x)=0$ 的实数根；

②（几何法）对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，并利用函数的性质找出零点。

三、二分法

1、二分法定义：

对于区间 $[a, b]$ 上连续不断且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y=f(x)$ ，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫二分法。

2、二分法条件：

$f(a) \cdot f(b) < 0$ 表明用二分法求函数的近似零点都是指变号零点。



典例精讲

1、根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位：分钟)

为 $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A, \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$ ，(A, c 为常数). 已知工人组装第 4 件产品用时 30 分

钟，组装第 A 件产品用时 15 分钟，那么 c 和 A 的值分别是()

A. 75, 25

B. 75, 16

C. 60, 25

D. 60, 16

【答案】D

学必求其心得，业必贵于专精

【解析】据题意可知 $A > 4$ ，故由工人组装第 4 件产品用时为 30 分钟可得 $f(4) = \frac{c}{\sqrt{4}} = 30 \Rightarrow c = 60$ ，又 $f(A) = \frac{c}{\sqrt{A}} = \frac{60}{\sqrt{A}} = 15 \Rightarrow A = 16$ ，故选 D.

2、汽车油箱为长方体形状容器，它的长为 acm ，宽为 bcm ，高为 ccm ，汽车开始行驶时油箱内装满汽油. 已知汽车的耗油量是 ncm^3 / km ，汽车行驶路程 $y(km)$ 与油箱内剩余油量的液面高度 $x(cm)$ 的函数关系式为()

A. $y = \frac{n}{ab}(c-x)(0 \leq x \leq c)$

B. $y = \frac{ab}{n}(c-x)(0 \leq x \leq c)$

C. $y = \frac{c}{ab}(n-x)(0 \leq x \leq c)$

D. $y = \frac{ab}{c}(n-x)(0 \leq x \leq c)$

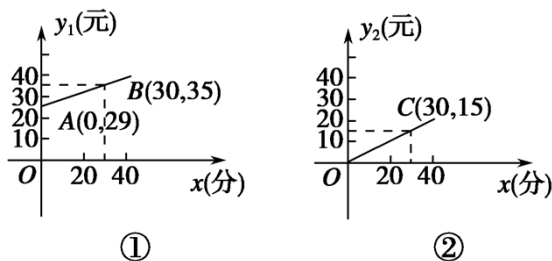
【答案】B

【解析】

因为汽车行驶时耗油量等于长方体容量的体积减去油箱内剩余油量，

所以 $n \cdot y = a \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot x$ ，故 $y = \frac{ab}{n}(c-x)(0 \leq x \leq c)$.

3、为了发展电信事业方便用户，电信公司对移动电话采用不同的收费方式，其中所使用的“如意卡”与“便民卡”在某市范围内每月(30天)的通话时间 x (分)与通话费 y (元)的关系分别如图①、②所示.



(1) 分别求出通话费 y_1, y_2 与通话时间 x 之间的函数关系式；

(2) 请帮助用户计算,在一个月內使用哪种卡便宜？

【答案】

(1) $y_1 = \frac{1}{5}x + 29, y_2 = \frac{1}{2}x$.

学必求其心得，业必贵于专精

(2) 当 $x = 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 = y_2$, 两种卡收费一致;

当 $x < 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 > y_2$, 即使用“便民卡”便宜;

当 $x > 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 < y_2$, 即使用“如意卡”便宜.

【解析】

(1) 由图像可设 $y_1 = k_1x + 29$, $y_2 = k_2x$, 把点 $B(30, 35)$, $C(30, 15)$ 分别代入 y_1, y_2 得 $k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = \frac{1}{2}$.

$$\therefore y_1 = \frac{1}{5}x + 29, y_2 = \frac{1}{2}x.$$

(2) 令 $y_1 = y_2$, 即 $\frac{1}{5}x + 29 = \frac{1}{2}x$, 则 $x = 96\frac{2}{3}$.

当 $x = 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 = y_2$, 两种卡收费一致;

当 $x < 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 > y_2$, 即使用“便民卡”便宜;

当 $x > 96\frac{2}{3}$ 时, $y_1 < y_2$, 即使用“如意卡”便宜.

4、某单位有员工 1000 名, 平均每人每年创造利润 10 万元. 为了增加企业竞争力, 决定优化产业结构, 调整出 x ($x \in \mathbf{N}^*$) 名员工从事第三产业, 调整后他们平均每人每年创造利润为 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)$ 万元 ($a > 0$), 剩下的员工平均每人每年创造的利润可以提高 $0.2x\%$.

(1) 若在保证剩余员工创造的年总利润不低于原来 1000 名员工创造的年总利润, 则最多调整出多少名员工从事第三产业?

(2) 在 (1) 的条件下, 若调整出的员工创造的年总利润始终不高于剩余员工创造的年总利润, 则 a 的取值范围是多少?

【答案】(1) 500 (2) $(0, 5]$

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

(1) 由题意得： $10(1000 - x)(1 + 0.2x\%) \leq 10 \cdot 1000$,

即 $x^2 - 500x \geq 0$ ，又 $x > 0$ ，所以 $0 < x \leq 500$ 。

即最多调整 500 名员工从事第三产业。

(2) 从事第三产业的员工创造的年总利润为 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x$ 万元，

从事原来产业的员工的年总利润为 $10(1000 - x)(1 + 0.2x\%)$ 万元，

则 $10\left(a - \frac{3x}{500}\right)x \leq 10(1000 - x)(1 + 0.2x\%)$ ，

所以 $ax - \frac{3x^2}{500} \leq 1000 + 2x - x - \frac{1}{500}x^2$ ，

所以 $ax \leq \frac{2x^2}{500} + 1000 + x$ ，即 $a \leq \frac{2x}{500} + \frac{1000}{x} + 1$ 恒成立，

因为 $\frac{2}{500}x + \frac{1000}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{500} \cdot \frac{1000}{x}} = 4$ ，

当且仅当 $\frac{2x}{500} = \frac{1000}{x}$ ，即 $x = 500$ 时等号成立。

所以 $a \leq 5$ ，又 $a > 0$ ，所以 $0 < a \leq 5$ ，即 a 的取值范围为 $(0, 5]$ 。

5、

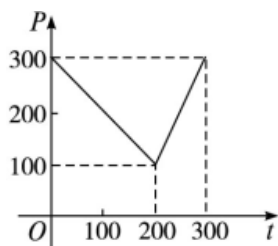


图1

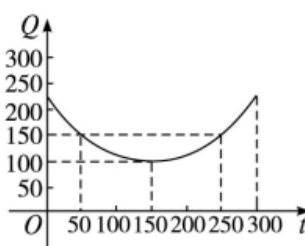


图2

(1) 写出图 1 表示的市场售价与上市时间的函数关系式 $P = f(t)$;

写出图 2 表示的种植成本与上市时间的函数关系式 $Q = g(t)$ 。

(2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益，何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/ 10^2 kg，时间单位：天)

学必求其心得，业必贵于专精

【答案】

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} -t + 300, & 0 \leq t \leq 200, \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300. \end{cases}, \quad g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100 (0 \leq t \leq 300)$$

(2) 从 2 月 1 日起第 50 天上市的西红柿纯收益最大

【解析】

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} -t + 300, & 0 \leq t \leq 200, \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300. \end{cases}$$

$$\text{设 } g(t) = a(t - 150)^2 + 100,$$

$$\text{将 } t = 50, \quad g(t) = 150 \text{ 代入得 } a = \frac{1}{200}.$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100 (0 \leq t \leq 300).$$

(2) 设 t 时的纯收益为 y 元，当 $0 \leq t \leq 200$ 时，

$$y = f(t) - g(t)$$

$$= (-t + 300) - \left[\frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100 \right]$$

$$= -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + 87.5 = -\frac{1}{200}(t - 50)^2 + 100.$$

当 $t = 50$ 时， y 取到最大值，最大值为 100.

当 $200 < t \leq 300$ 时， $y = f(t) - g(t)$

$$= (2t - 300) - \left[\frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100 \right]$$

$$= -\frac{1}{200}t^2 + \frac{7}{2}t - 512.5$$

$$= -\frac{1}{200}(t - 350)^2 + 100.$$

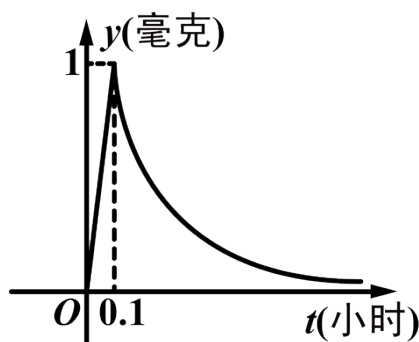
当 $t = 300$ 时取到最大值，最大值为 87.5.

故从 2 月 1 日起第 50 天上市的西红柿纯收益最大

6、为了预防流感,某学校对教室用药熏消毒法进行消毒。已知药物释放过程中,室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时)成正比;药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y = (\frac{1}{16})^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示.根据图中提供的信息,回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 求每立方米空气中的含药量 y (毫克)与时间 t (小时)之间的函数关系式;

(2)据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时,学生方可进教室,那么从药物释放开始, 至少需要经过多少小时后,学生才能回到教室.



【答案】(1)∵药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y 与时间 t 成正比, ∴设 $y=kt$,代入点(0.1, 1),得 $k=10$,∴ $y=10t$ ($0 \leq t \leq 0.1$).

同理, 将点 (0.1,1)代入解析式 $y = (\frac{1}{16})^{t-a}$,得 $a=0.1$,

综上所述 $y = \begin{cases} 10t(0 \leq t \leq 0.1), \\ (\frac{1}{16})^{t-0.1}(t > 0.1). \end{cases}$

(2) 令 $y=0.25$,解得 $t_1=0.025, t_2=0.6$,

∴从药物释放开始, 至少需要 0.6 小时后,学生才能回到教室。

学必求其心得，业必贵于专精

7、函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 B

学必求其心得，业必贵于专精

【解析】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, $\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在定义域上为增函数, $y = (\frac{1}{2})^x$ 在定义域上为增函数, $\therefore$ 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 在定义域上为增函数, 而 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, 故函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为 1 个

8、方程 $3^x + x = 3$ 的解所在的区间为()

- A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

【答案】A

【解析】

令 $f(x) = 3^x + x - 3$ 此函数是连续的, $\therefore f(0) = 1 - 3 < 0$, $f(1) = 4 + 1 - 3 > 0 \therefore f(x) = 3^x + x - 3$ 在区间 $(0,1)$ 有一个零点, 即方程 $3^x + x = 3$ 在区间 $(0,1)$ 有解

9、设 $f(x) = |2 - x^2|$, 若 $a < b < 0$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 ab 的取值范围是 ()

- A. (0,2) B. (0,2] C. (0,4] D. (0, $\sqrt{2}$)

【答案】A

【解析】

保留函数 $y = 2 - x^2$ 在 x 轴上方的图像, 将其在 x 轴下方的图像翻折到 x 轴上方区即可得到函数 $f(x) = |2 - x^2|$ 的图像. 通过观察图像, 可知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\sqrt{2}]$ 上是减函数, 在区间 $[-\sqrt{2}, 0]$ 上是增函数, 由 $a < b < 0$, 且 $f(a) = f(b)$ 可知 $a < -\sqrt{2} < b < 0$, 所以 $f(a) = a^2 - 2$, $f(b) = 2 - b^2$, 从而 $a^2 - 2 = 2 - b^2$, 即 $a^2 + b^2 = 4$, 又 $2|ab| \leq a^2 + b^2 = 4$, 所以 $0 < ab < 2$. 选项为 A. 考察函数图像的翻折变换. 体现了数学由简到繁的原则, 通过研究函数 $y = 2 - x^2$ 的图像和性质, 进而得到 $f(x) = |2 - x^2|$ 的图像和性质.

10、已知函数 $f(x) = \log_a(1-x) + \log_a(x+3)$ ($0 < a < 1$).

(1)求函数 $f(x)$ 的零点;

(2)若函数 $f(x)$ 的最小值为 -4 , 求 a 的值.

学必求其心得，业必贵于专精

【答案】(1)要使函数有意义：则有 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$

解之得： $-3 < x < 1$.

函数可化为 $f(x) = \log_a(1-x)(x+3) = \log_a(-x^2-2x+3)$.

由 $f(x) = 0$ ，得 $-x^2-2x+3=1$ ，即 $x^2+2x-2=0$ ，

$$x = -1 \pm \sqrt{3}, \quad -1 \pm \sqrt{3} \in (-3, 1),$$

$\therefore f(x)$ 的零点是 $-1 \pm \sqrt{3}$ 。

(2) 函数可化为：

$$f(x) = \log_a(1-x)(x+3) = \log_a(-x^2-2x+3) = \log_a[-(x+1)^2+4].$$

$$\because -3 < x < 1, \therefore 0 < -(x+1)^2+4 \leq 4.$$

$$\because 0 < a < 1, \therefore \log_a[-(x+1)^2+4] \geq \log_a 4, \text{ 即 } f(x)_{\min} = \log_a 4.$$

$$\text{由 } \log_a 4 = -4, \text{ 得 } a^{-4} = 4, \therefore a = 4^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

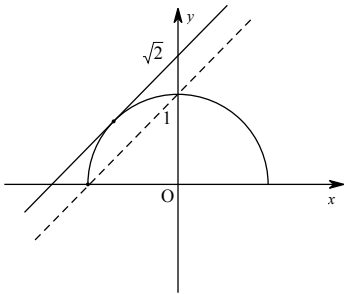
11、若直线 $y = x - m$ 与曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \in (-\sqrt{2}, -1]$

【解析】

$y = x - m$ 表示倾角为 45° ，纵截距为 $-m$ 的直线族，而 $y = \sqrt{1-x^2}$ 则表示以 $(0,0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆在 x 轴上方的部分（包括圆与 x 轴的交点）如下图所示，显然，欲使直线与半圆有两个不同交点，只需直线的纵截距 $-m \in [1, \sqrt{2})$ ，即 $m \in (-\sqrt{2}, -1]$.

学必求其心得，业必贵于专精



12、函数 $y=a|x|$ 与 $y=x+a$ 的图象恰有两个公共点，则实数 a 的取值范围是 ()

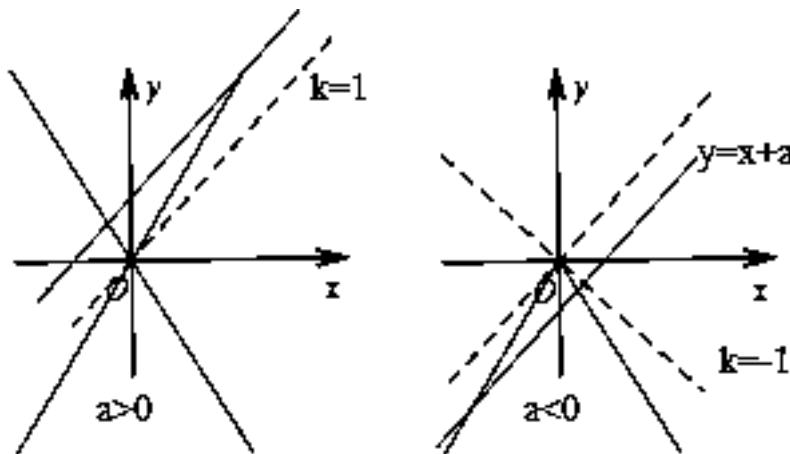
- A. $(1, +\infty)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【解析】

画出 $y=a|x|$ 与 $y=x+a$ 的图象.

情形 1: $\begin{cases} a > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a > 1$, 情形 2: $\begin{cases} a < 0 \\ a < -1 \end{cases} \Rightarrow a < -1$, 选 D.



13、(2013 年海淀一模理)已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x \leq 0, \\ x^2 - 3ax + a, & x > 0 \end{cases}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____

【答案】 $\frac{4}{9} < a \leq 1$

【解析】

依题意，要使函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，

则当 $x \leq 0$ 时，方程 $2^x - a = 0$ 即 $2^x = a$ 必有一个根，此时 $0 < a \leq 1$ ；

当 $x > 0$ 时，方程 $x^2 - 3ax + a = 0$ 有两个不等的实根，即方程 $x^2 - 3ax + a = 0$ 有两个不等的正实根，于是有

$$\begin{cases} \Delta = 9a^2 - 4a > 0, \\ 3a > 0, \\ a > 0, \end{cases} \quad \text{由此解得 } a > \frac{4}{9}.$$

因此，满足题意的实数 a 需满足 $\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ a > \frac{4}{9}, \end{cases}$ 即 $\frac{4}{9} < a \leq 1$.

14、已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^x - x^{\frac{1}{3}}$ ，那么在下列区间中含有函数 $f(x)$ 零点的是

- A. $(0, \frac{1}{3})$ B. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ D. $(\frac{2}{3}, 1)$

【答案】B

【解析】

由题意知： $f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} - (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}} > 0$ ， $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < 0$ ， $f(1) = \frac{1}{2} - 1 < 0$ ，

$f(2) = (\frac{1}{2})^2 - 2^{\frac{1}{3}} < 0$ ，由零点判定定理知在区间 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 内原函数有零点，故选

B.

15、用二分法求方程 $x^2 = 2$ 的正实根的近似解(精确度 0.001) 时，如果我们选

取初始区间是 $[1.4, 1.5]$ ，则要达到精确度要求至少需要计算的次数是_____.

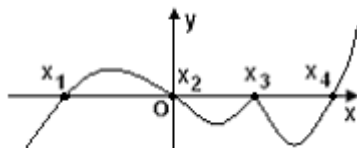
【答案】7

【解析】

设至少需要计算 n 次，由题意知 $\frac{1.5 - 1.4}{2^n} < 0.001$ ，

即 $2^n > 100$ ，由 $2^6 = 64, 2^7 = 128$ 知 $n = 7$.

16、用二分法求下图所示函数 $f(x)$ 的零点时，不可能求出的零点是()



- A. x_1 B. x_2 C. x_3 D. x_4

【答案】C

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

二分法求函数 $f(x)$ 的零点时，函数必须满足在零点两侧的函数值异号，而图中函数在零点 x_3 的两侧的函数值都是负值，故不能用二分法求出，

17、已知函数 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ ， $a+b+c=0$ ， $f(0) > 0$ ， $f(1) > 0$ ，证明 $a > 0$ ，并利用二分法证明方程 $f(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 内有两个实根.

【答案】证明 $\because f(1) > 0, \therefore 3a+2b+c > 0$ ，即 $3(a+b+c) - b - 2c > 0, \because a+b+c=0, \therefore -b-2c > 0$ ，则 $-b-c > c$ ，即 $a > c$.

$\because f(0) > 0, \therefore c > 0$ ，则 $a > 0$ 。在 $[0, 1]$ 内选取二等分点 $\frac{1}{2}$ ，则 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a + b + c = \frac{3}{4}a + (-a) = -\frac{1}{4}a < 0$ 。

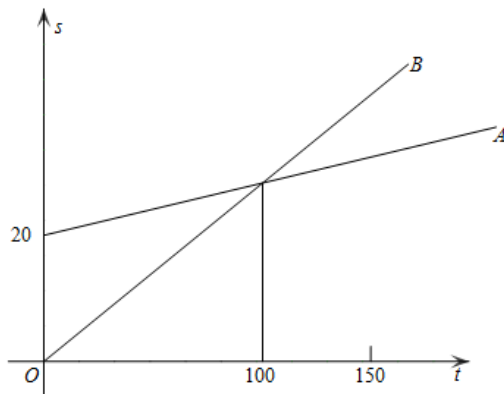
$\because f(0) > 0, f(1) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上至少各有一个零点，又 $f(x)$ 最多有两个零点，从而 $f(x)=0$ 在 $[0, 1]$ 内有两个实根.



强化突破

1、某电信公司推出两种手机收费方式：**A** 种方式是月租 20 元，**B** 种方式是月租 0 元。一个月的本地网内打出电话时间 t （分钟）与打出电话费 s （元）的函数关系如图，当打出电话 150 分钟时，这两种方式电话费相差()



学必求其心得，业必贵于专精

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/658060122006006054>