关于数理方程分离变量法

§2.1 齐次发展方程的分离变量法

一 分离变量法简介

研究两端固定的理想弦的自由振动，即定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & 0<x<l, t>0 \\ u\big|_{x=0}=0 \quad u\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) \quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

方程、边界条件均齐次

设$u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入上述波动方程和边界条件得

$$\begin{cases} XT''-a^2X''T=0 \xrightarrow{\text{用 } a^2XT \text{ 遍除}} \dfrac{T''}{a^2T}=\dfrac{X''}{X} \\ X(0)T(t)=0 \\ X(l)T(t)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X(0)=X(l)=0$$

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$$

两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数，把这个常数记作------ $-\lambda$

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

这可以分离为关于X的常微分方程和关于T的常微分方程，且边界条件也同样进行分离

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

称为固有值（本征值）问题

二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + \lambda y = 0$

求方程的通解的步骤为:

(1)写出微分方程的特征方程 $r^2 + \lambda = 0,$

(2)求出特征根 $r_1, r_2,$

(3)根据特征根的情况按下表写出所给微分方程的通解。

特 征 根	通 解
$\lambda < 0, r_1 \neq r_2$实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$\lambda = 0, r_1 = r_2 = 0$	$y = (C_1 + C_2 x)$
$\lambda > 0, r_1 \neq r_2 = \pm i\beta$	$y = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

1、在λ<0时，方程的解是

$$X(x)=C_1e^{x\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

积分常数 C_1 和 C_2 由边界条件确定

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{l\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{-l\sqrt{-\lambda}}=0\end{cases}$$

由此解出 C_1=0, C_2=0，从而 $X(x)\equiv 0$

2、λ=0 时方程的解是 $X(x)=C_1x+C_2$

$$\begin{cases}C_2=0\\ C_1l+C_2=0\end{cases}$$

则仍然解出 $C_1=0\quad C_2=0$

$$\therefore\quad u(x,t)=X(x)T(t)\equiv 0$$

3、 $\lambda>0$的情况

方程的解是 $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$$

只有$\sin\sqrt{\lambda}l=0$才能保证$C_2\neq 0$，方程有非零解

于是 $\sqrt{\lambda}l=n\pi$ 或 $\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ $n=1,2,\cdots$

此时$X_n(x)=C_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$

λ_n称为**固有值**，$X_n(x)$称为**固有函数**

再看关于T的方程

$$T''+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T=0$$

这个方程的解 $T_n(t) = A_n' \cos\dfrac{n\pi at}{l} + B_n' \sin\dfrac{n\pi at}{l}$

分离变量的形式解

$$u_n(x,t) = (A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

由叠加原理，一般解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

现在要求出叠加系数 A_n 和 B_n

满足初始条件

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (0 < x < l)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

方程左边是傅里叶正弦级数,这就提示我们把右边的展开为傅里叶正弦级数，然后比较傅里叶系数，得

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta \\ B_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta \end{cases}$$

按上述公式计算出系数 A_n和 B_n ，则可得原问题的解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

注：该解称为古典解，在求解中我们假设无穷级数是收敛的。

如上的方法称为分离变量法，是齐次发展方程求解的一个有效方法。下面对该方法的步骤进行总结。

分离变量流程图

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0$$

$$u=T(t)X(x)$$

$$X(0)=X(l)=0$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

$$T''+a^2\lambda T=0$$

$$X''+\lambda X=0$$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

固有值（特征值）问题

$$T_n=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

$$X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u_n=T_n(t)X_n(x)$$

$$u=\sum T_n(t)X_n(x)$$

$$u=u(x,t)$$

偏微分方程 $\xrightarrow{\text{分离变量}}$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{常微分方程（关于X）+边界条件} \rightarrow \text{故有(值)函数} \\ \text{常微分方程（关于T）+初始条件} \rightarrow \text{叠加系数} \end{cases}$$

$$\text{通解} = \sum_{\text{本征值}}^{\infty} \text{故有函数}$$

【例题1】研究细杆导热问题,初始时刻杆的一端温度为零度,另一端跟外界绝热，杆上初始温度为 $\varphi(x)$,试求无热源时细杆上温度的变化。

【解】杆上温度满足下列泛定方程和定解条件

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

分析：方程与边界条件均为齐次，用分离变量法，根据分离变量法流程，分析如下

试探解 $u(x,t) = X(x)T(t)$

代入方程和边界条件得 固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \quad X'(l) = 0 \end{cases}$$

和常微分方程

$$T' + a^2 \lambda T = 0$$

分离变量流程图

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad u_t = a^2 u_{xx} \qquad u|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0$$

$$u=T(t)X(x)$$

$$X(0)=X'(l)=0$$

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

$$X''+\lambda X=0$$

$$T'+a^2\lambda T=0$$

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, n=1,2,L$$

固有值（特征值）问题

$$T_n(t)=C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}$$

$$X_n=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$$

$$u_n=T_n(t)X_n(x)$$

$$u=\sum T_n(t)X_n(x)$$

$$u=u(x,t)$$

经讨论知，仅 $\lambda>0$时有非零解，且

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由 $X(0)=0$ 得 $C_1=0$

由 $X'(l)=0$ 得 $C_2\cos\sqrt{\lambda}l=0$

只有 $\cos\sqrt{\lambda}l=0$ 由此得

$$\sqrt{\lambda}l=(n+\frac{1}{2})\pi,\quad n=0,1,2,3\cdots$$

于是得固有值和固有函数为

$$\lambda_n=\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

下面求解

$$T' + a^2\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}T = 0$$

得

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t}$$

由叠加原理，得

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

确定系数 C_n ,由初值条件知

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \varphi(x) \quad (0 < x < l)$$

于是 $$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx$$

如取 $\varphi(x) = \frac{A}{l}x$ ，则

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{A}{l}x\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx = \frac{2A}{l^2}[x(-\frac{2l}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l})\Big|_0^1$$

$$+\frac{2l}{(2n+1)\pi}\int_0^l \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx] = (-1)^n\frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2}$$

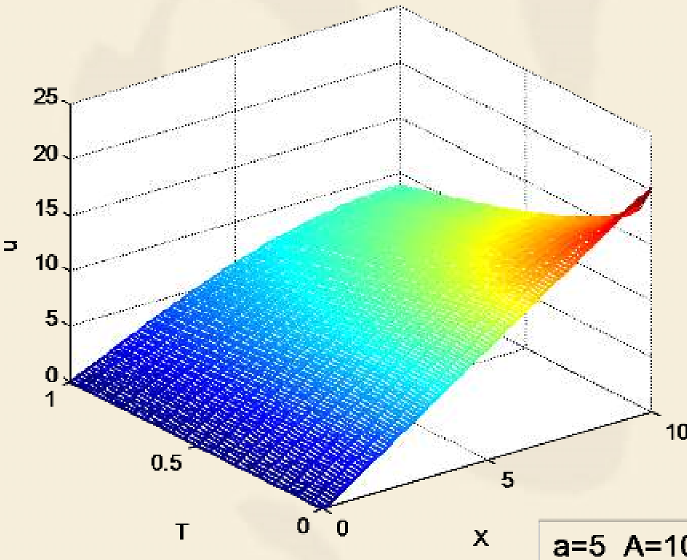
从而下列问题

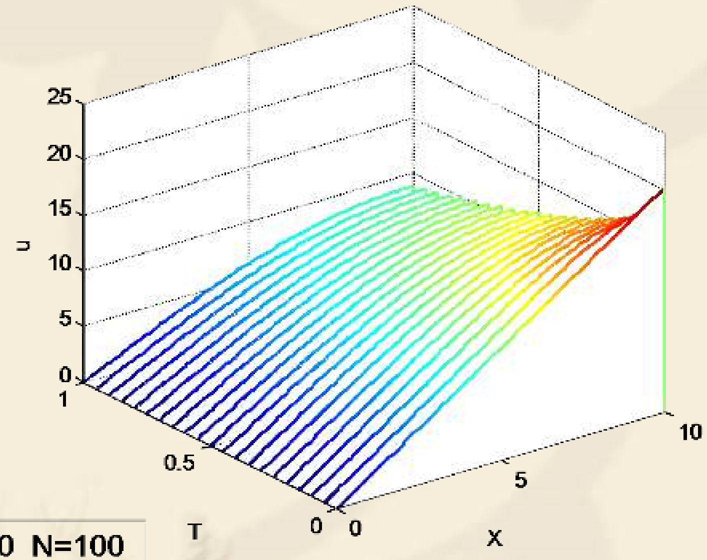
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{A}{l} x \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t) = \frac{2A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8A}{(2n+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

图形如下: (程序:my1)





a=5 A=10 l=10 N=100

(a) 精确解图

(b) 瀑布图

§2.2 稳定场齐次问题的分离变量法

1 矩形区域上拉普拉斯方程

【例题1】散热片的横截面为矩形。它的一边 $y=b$ 处于较高温度 U，$y=0$ 边处于冷却介质中而保持较低的温度 u_0，其他两边 $x=0$，$x=a$ 温度保持为零，求解这横截面上的稳定温度分布 $u(x,y)$．

【解】先写出定解问题定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u\big|_{x=0}=0 \quad u\big|_{x=a}=0 \quad (0<y<b) \\ u\big|_{y=0}=u_0 \quad u\big|_{y=b}=U \quad (0<x<a) \end{cases}$$

方程齐次

这组边界条件齐次

用分离变量法

分离变量流程图

$u|_{y=0}=u_0$

$u|_{y=b}=U$

$u_{xx}+u_{yy}=0$

$u|_{x=0}=u|_{x=a}=0$

$u=X(x)Y(y)$

$X(0)=X(a)=0$

$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$

$Y''-\lambda Y=0$

$X''+\lambda X=0$

$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2, n=1,2,\text{L}$

$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x,$

$Y_n(y)=A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

$u_n=X_n(x)Y_n(y)$

$u(x,y)=\sum X_n(x)Y_n(y)$

$u=u(x,y)$

固有值（特征值）问题

设形式解为：

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

代入上述泛定方程,得到

得到固有值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \quad X(a)=0 \end{cases}$

和常微分方程 $Y''-\lambda Y=0$

得固有值：$\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} \quad (n=1,2,\ldots..)$

固有函数：$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a}\quad (n=1,2,\ldots\ldots)$$

而 $$Y_n(y)=A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

于是有

$$u_n(x,y)=(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi x}{a}$$

叠加得

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi x}{a}$$

为确定叠加系数，将 $u(x, y)$ 代入非齐次边界条件

$$
\begin{cases}
\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi x}{a} = u_0 \\
\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}b})\sin\frac{n\pi x}{a} = U
\end{cases}
$$

将等式右边展开为傅里叶正弦级数,并两边比较系数，得

$$
A_n + B_n = \frac{2}{a}\int_0^a u_0 \sin\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2u_0(1-(-1)^n)}{n\pi}
$$

$$A_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = \frac{2U(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

联立求解得

$$A_n = \frac{(1-(-1)^n)(U - u_0 e^{-\frac{n\pi b}{a}})}{n\pi \mathrm{sh}(\frac{n\pi b}{a})}$$

$$B_n = \frac{(1-(-1)^n)(u_0 e^{\frac{n\pi b}{a}} - U)}{n\pi \mathrm{sh}(\frac{n\pi b}{a})}$$

故原问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi\,\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{a}}[U\mathrm{sh}\frac{n\pi y}{a}+u_0\mathrm{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}]\sin\frac{n\pi x}{a}$$

小结：对矩形域上拉普拉斯方程，只要一组边界条件是齐次的，则可使用分离变量法求解。

图形如下：（程序：**my2**）