

## 考点二 二次根式

### 知识点整合

#### 1. 二次根式的有关概念

(1) 二次根式的概念

形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式. 其中符号“ $\sqrt{\quad}$ ”叫做二次根号, 二次根号下的数叫做被开方数.

【注意】被开方数 $a$ 只能是非负数. 即要使二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义, 则 $a \geq 0$ .

(2) 最简二次根式

被开方数所含因数是整数, 因式是整式, 不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式.

(3) 同类二次根式

化成最简二次根式后, 被开方数相同的几个二次根式, 叫做同类二次根式.

#### 2. 二次根式的性质

$$(1) \sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0);$$

$$(2) (\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0);$$

$$(3) \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a > 0) \\ 0 (a = 0) \\ -a (a < 0) \end{cases};$$

$$(4) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$(5) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0).$$

#### 3. 二次根式的运算

(1) 二次根式的加减

合并同类二次根式: 在二次根式的加减运算中, 把几个二次根式化为最简二次根式后, 若有同类二次根式, 可把同类二次根式合并成一个二次根式.

(2) 二次根式的乘除

乘法法则:  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0);$

除法法则:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$ .

(3) 二次根式的混合运算

二次根式的混合运算顺序与实数的运算顺序一样, 先乘方, 后乘除, 最后加减, 有括号的先算括号内的.

在运算过程中, 乘法公式和有理数的运算律在二次根式的运算中仍然适用.

## 考向一 二次根式的概念及性质

### 1. 二次根式的有关概念

(1) 二次根式的概念

形如  $\sqrt{a} (a \geq 0)$  的式子叫做二次根式. 其中符号 “ $\sqrt{\quad}$ ” 叫做二次根号, 二次根号下的数叫做被开方数.

### 2. 二次根式的性质

(1)  $\sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0)$  ;

(2)  $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$  ;

(3)  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a > 0) \\ 0 (a = 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$  ;

(4)  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$  ;

(5)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$ .

### 典例引领

1. 在函数  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$  中, 自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq 0$  且  $x \neq 2$     B.  $x > 2$     C.  $x \geq 1$  且  $x \neq 2$     D.  $x > 1$  且  $x \neq 2$

**【答案】** C

**【分析】** 本题考查了函数的自变量有意义的条件, 分式有意义的条件、二次根式有意义的条件. 根据分式的分母不能为 0, 被开方数不 0 即可得.

**【详解】** 解: 在函数  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$  中,

函数的自变量有意义的条件是  $x-2 \neq 0$ ， $x-1 \geq 0$ ，

解得  $x \geq 1$  且  $x \neq 2$ ，

即自变量  $x$  的取值范围是  $x \geq 1$  且  $x \neq 2$ ，

故选：C。

2. 下列式子有意义的是 ( )

A.  $\sqrt{-3}$

B.  $(-\sqrt{-3})^2$

C.  $-\sqrt{(-3)^2}$

D.  $\sqrt{-(-3)^2}$

**【答案】C**

**【分析】** 本题考查了二次根式有意义的条件，二次根式有意义就是被开方数大于或等于 0。根据二次有意义的条件依次判定即可。

**【详解】** A、 $\sqrt{-3}$  被开方数是  $-3 < 0$ ，故  $\sqrt{-3}$  无意义，不符合题意；

B、 $(-\sqrt{-3})^2$  被开方数是  $-3 < 0$ ，故  $(-\sqrt{-3})^2$  无意义，不符合题意；

C、 $-\sqrt{(-3)^2}$  被开方数是  $(-3)^2 = 9 > 0$ ，故  $-\sqrt{(-3)^2}$  有意义，符合题意；

D、 $\sqrt{-(-3)^2}$  被开方数是  $-(-3)^2 = -9 < 0$ ，故  $\sqrt{-(-3)^2}$  无意义，不符合题意。

故选：C。

3. 若二次根式  $\sqrt{4x-2}$  在实数范围内有意义，则  $x$  的取值范围为 ( )

A.  $x > \frac{1}{2}$

B.  $x \geq \frac{1}{2}$

C.  $x < \frac{1}{2}$

D.  $x \leq \frac{1}{2}$

**【答案】B**

**【分析】** 本题主要考查了二次根式有意义的条件，熟知二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0 是解题的关键。

**【详解】** 解：∵ 二次根式  $\sqrt{4x-2}$  在实数范围内有意义，

$$\therefore 4x-2 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq \frac{1}{2},$$

故选：B。

4. 要使  $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义， $x$  应满足的条件是 ( )

A.  $x=2$

B.  $x \neq 2$

C.  $x \geq 2$

D.  $x \leq 2$

**【答案】C**

**【分析】** 本题考查了二次根式，掌握二次根式被开方数是非负数是解答本题的关键。

根据被开方数大于等于0，得  $x-2 \geq 0$ ，由此选出答案.

【详解】解：根据题意，

$$x-2 \geq 0,$$

解得  $x \geq 2$ ，

故选：C.

5. 若  $\sqrt{1-3x}$  在实数范围内有意义，则实数  $x$  的值可以是\_\_\_\_\_. (写一个即可)

【答案】0 (答案不唯一)

【分析】本题考查二次根式有意义的条件，掌握二次根式中被开方数大于等于0是解题的关键.

根据二次根式中被开方数的非负性求解.

【详解】解：由题意可知  $1-3x \geq 0$ ，

$$\text{解得 } x \leq \frac{1}{3},$$

则  $x$  的值可以是0.

故答案为：0(答案不唯一).

6. 若  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$  在实数范围内有意义，则  $x$  取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】 $x > 2$

【分析】本题考查了二次根式和分式有意义，是基础题.

由根式内部的代数式大于等于0，分式的分母不为0联立不等式组求解.

【详解】解：要使  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$  有意义，

$$\text{则 } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases},$$

解得  $x \geq 1$  且  $x > 2$ .

$\therefore x$  的取值范围是  $x > 2$ .

故答案为： $x > 2$ .

7. 要使代数式  $\sqrt{x-3}$  有意义，则  $x$  可以取的最小整数是\_\_\_\_\_.

【答案】3

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件. 根据“二次根式的被开方数为非负数”，即可求解.

**【详解】**解：根据题意得： $x-3 \geq 0$ ，

解得： $x \geq 3$ ，

$\therefore x$  可以取的最小整数是 3.

故答案为：3

8. 若  $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义，则实数  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \geq 2$

**【分析】** 本题考查了二次根式有意义的条件，列出不等式  $x-2 \geq 0$  进行求解即可，掌握二次根式被开方数是非负数是解答本题的关键.

**【详解】**解： $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义，

$\therefore x-2 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 2$ ，

故答案为： $x \geq 2$ .

9. 函数  $y = \sqrt{2x+4} - \frac{3}{x-1}$  的自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \geq -2$  且  $x \neq 1$

**【分析】** 本题考查了二次根式和分式有意义的条件. 根据二次根式和分式有意义的条件得到  $2x+4 \geq 0$  且  $x-1 \neq 0$ ，解不等式即可求解.

**【详解】**解：由题意可得： $2x+4 \geq 0$  且  $x-1 \neq 0$ ，

解得  $x \geq -2$  且  $x \neq 1$ .

$\therefore$  自变量  $x$  的取值范围是  $x \geq -2$  且  $x \neq 1$ .

故答案为： $x \geq -2$  且  $x \neq 1$

10. 若代数式  $\frac{2x+1}{2-\sqrt{x+1}}$  有意义，则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \geq -1$  且  $x \neq 3$

**【分析】** 根据二次根式的意义、分式有意义的条件列不等式组求解即可；掌握二次根式的被开方数大于等于零，分式的分母不等于零是解题的关键.

**【详解】**解：由题意可得： $\begin{cases} 2-\sqrt{x+1} \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ，解得： $x \geq -1$  且  $x \neq 3$ .

故答案为： $x \geq -1$  且  $x \neq 3$ .

11. 若二次根式  $\sqrt{4x-8}$  在实数范围内有意义，则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \geq 2 / 2 \leq x$

**【分析】** 本题考查了二次根式有意义的条件，根据被开方数是非负数，可求得  $x$  的取值，正确计算是解答本题的关键。

**【详解】** 解：∵二次根式  $\sqrt{4x-8}$  在实数范围内有意义，

∴  $4x-8 \geq 0$ ，解得  $x \geq 2$ ，

故答案为： $x \geq 2$ 。

12. 若  $x$ 、 $y$  都是实数，且  $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} + y + 7 = 0$ ，则  $xy^2$  的平方根为\_\_。

**【答案】**  $\pm 14$

**【分析】** 本题考查的是二次根式有意义的条件和平方根的定义，掌握二次根式中的被开方数必须是非负数是解题的关键。根据二次根式有意义的条件列出不等式求出  $x$  的值，得到  $y$  的值，根据平方根的定义解答即可。

**【详解】** 解：由题意得， $x-4 \geq 0, 4-x \geq 0$ ，

解得， $x=4$ ，

则  $y=-7$ ，

$\therefore xy^2 = 4 \cdot (-7)^2 = 196$ ，

196 的平方根是  $\pm 14$ ，

故答案为： $\pm 14$ 。

13. 函数  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$  中自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_

**【答案】**  $x \geq 0$

**【分析】** 根据二次根式有意义的条件、分式有意义的条件列出不等式组，解不等式组即可求解。

**【详解】** 解：由题意得，
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$$

解得， $x \geq 0$ ，

故答案为： $x \geq 0$ 。

**【点睛】** 本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分式的分母不为 0 是解题的关键。

14. 已知： $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $(a-\sqrt{18})^2 + \sqrt{b-6} + |c-3\sqrt{2}| = 0$ 。

(1)求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的值；

(2)试问以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为边能否构成三角形？若能构成三角形，请判断三角形的形状；若不能构成三角形，请说明理由.

**【答案】**(1)  $a=3\sqrt{2}$ ， $b=6$ ， $c=3\sqrt{2}$

(2)以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为边能构成三角形，三角形的形状是等腰三角形

**【分析】**(1) 根据非负数之和等于零，则每个非负数等于零，分别建立方程求解即可；

(2) 先比较长三边的大小，再用较小两边之和与最大边比较即可判断能够构成三角形；然后根据等腰三角形的概念求解即可.

**【详解】**(1)  $\because (a-\sqrt{18})^2 + \sqrt{b-6} + |c-3\sqrt{2}| = 0$

$$\therefore a-\sqrt{18}=0, \quad b-6=0, \quad c-3\sqrt{2}=0$$

$$\therefore a=3\sqrt{2}, \quad b=6, \quad c=3\sqrt{2};$$

$$(2) \because 1 < 2 < 9,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{2} < 3, \quad \text{即 } 6 < 6\sqrt{2} < 18$$

$$\therefore a+c=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6\sqrt{2} > 6=b$$

$\therefore$ 以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为边能构成三角形，

$$\therefore a=c=3\sqrt{2}$$

$\therefore$ 三角形的形状是等腰三角形.

**【点睛】** 本题考查了非负数的性质，二次根式有意义的条件和构成三角形的条件，等腰三角形的概念，解题的关键是根据非负数之和等于零的条件分别建立方程和如何判定三边能否构成三角形.

15. 已知  $\sqrt{a-12} + 2\sqrt{12-a} = b+8$ .

(1)求  $a$  的值；

(2)求  $a^2 - b^2$  的平方根.

**【答案】**(1)12

(2)  $\pm 4\sqrt{5}$

**【分析】** 本题考查二次根式有意义的条件、求一个数的平方根，关键是熟知二次根式的被开方数为非负数.

(1) 根据二次根式的被开方数为非负数求解即可；

(2) 先求得  $b$  值和  $a^2 - b^2$ ，再根据一个正数有两个平方根，且互为相反数求解即可。

**【详解】**(1) 解：由题意， $a - 12 \geq 0$  且  $12 - a \geq 0$ ，解得  $a = 12$ ，

(2) 解： $\because a = 12$ ，

$$\therefore b + 8 = 0, \text{ 则 } b = -8,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 12^2 - (-8)^2 = 80,$$

$$\therefore a^2 - b^2 \text{ 的平方根是 } \pm 4\sqrt{5}.$$

16. 若  $y = \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x} + 3$  有意义，求  $y^x$  的值。

**【答案】**  $y^x = 9$ 。

**【分析】** 本题主要考查了二次根式有意义的条件，有理数的乘方运算，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质求出  $x = 2$ ， $y = 3$ 。

**【详解】** 解：由题意得： $x - 2 \geq 0$ ， $2 - x \geq 0$ ，

解得： $x = 2$ ，

$$\therefore y = 3,$$

$$\therefore y^x = 3^2 = 9.$$

17. 如果  $y = \frac{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-16}}{x-4} + 2$ ，求代数式  $\frac{1}{2}x + y$  的值。

**【答案】** 0

**【分析】** 由二次根式与分式有意义的条件建立不等式组可得  $x = -4$ ，再求解  $y = 2$ ，再代入计算即可得到答案。

**【详解】** 解： $\because y = \frac{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-16}}{x-4} + 2$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ x^2-16 \geq 0, \text{ 解得: } x = -4, \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore y = 0 + 2 = 2;$$

$$\therefore \frac{1}{2}x + y = \frac{1}{2} \times (-4) + 2 = -2 + 2 = 0;$$

**【点睛】** 本题考查的是二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，利用平方根的含义解方程，求解代数式的值，掌握二次根式与分式有意义的条件是解本题的关键。



## 变式拓展

1. 要使代数式 $\sqrt{x-2}$ 有意义, 则 $x$ 的取值范围是 ( )

- A.  $x \neq 2$       B.  $x \geq 2$       C.  $x > 2$       D.  $x \leq 2$

**【答案】B**

**【分析】**本题考查了二次根式有意义的条件, 根据题意得出 $x-2 \geq 0$ , 求解即可, 熟练掌握二次根式的被开方数大于等于零是解此题的关键.

**【详解】**解: 要使代数式 $\sqrt{x-2}$ 有意义, 则 $x$ 的取值范围是 $x-2 \geq 0$ , 即 $x \geq 2$ ,

故选: B.

2. 若二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义, 则 $x$ 的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq 3$       B.  $x \leq 3$       C.  $x > 3$       D.  $x < 3$

**【答案】A**

**【分析】**根据被开方数为非负数求解即可.

**【详解】**解:  $\because$ 二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义,

$\therefore x-3 \geq 0$ ,

解得:  $x \geq 3$ .

故选 A.

**【点睛】**本题考查二次根式有意义的条件. 掌握被开方数为非负数是解题关键.

3. 下列根式中, 一定是二次根式的是 ( )

- A.  $\sqrt{a}$       B.  $\sqrt{a^2+1}$       C.  $\sqrt{-(a-1)^2}$       D.  $\sqrt[3]{5}$

**【答案】B**

**【分析】**本题考查了二次根式的定义, 根据二次根式有意义的条件: 被开方数为非负数, 逐个进行判断即可.

**【详解】**解: A、当 $a < 0$ 时,  $\sqrt{a}$ 无意义, 不符合题意;

B、 $\because a^2 \geq 0$ ,  $\therefore a^2+1 \geq 1$ ,  $\therefore \sqrt{a^2+1}$ 是二次根式, 符合题意;

C、 $\because (a-1)^2 \geq 0$ ,  $\therefore -(a-1)^2 \leq 0$ ,  $\therefore \sqrt{-(a-1)^2}$ 不是二次根式, 不符合题意;

D、 $\sqrt[3]{5}$ 不是二次根式, 不符合题意;

故选: B.

4. 若二次根式 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义, 则 $x$ 的取值范围是 ( )

A.  $x \geq 5$

B.  $x > 5$

C.  $x \leq 5$

D.  $x < 5$

【答案】A

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式的被开方数是非负数列出不等式并求解，即可得出答案。

【详解】解：若二次根式  $\sqrt{x-5}$  在实数范围内有意义，  
则有  $x-5 \geq 0$ ，  
解得  $x \geq 5$ 。

故选：A。

5. 若二次根式  $\sqrt{x-7}$  在实数范围内有意义，则  $x$  的取值范围是（ ）

A.  $x < 7$

B.  $x > 7$

C.  $x \leq 7$

D.  $x \geq 7$

【答案】D

【分析】此题主要考查了二次根式有意义的条件，关键是根据二次根式有意义的条件可得  $x-7 \geq 0$ ，再解不等式即可。

【详解】解：由题意得： $x-7 \geq 0$ ，  
解得： $x \geq 7$ ，  
故选：D。

6. 函数  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$  中自变量  $x$  的取值范围是（ ）

A.  $x \geq 1$

B.  $x \geq 1$  且  $x \neq 0$

C.  $x \leq 1$  且  $x \neq 0$

D.  $x > 1$

【答案】A

【分析】本题考查了求函数自变量的取值范围，熟练掌握二次根式的被开方数是非负数，分式的分母不等于 0 是解题的关键。根据被开方数大于等于 0 和分式的分母不等于 0 的条件可得  $x-1 \geq 0$ ， $x \neq 0$ ；求解不等式，即可得出答案。

【详解】解：由题意得： $x-1 \geq 0$  且  $x \neq 0$ ，  
解得： $x \geq 1$ ，  
故选：A。

7. 若式子  $\sqrt{x+5}$  在实数范围内有意义，则  $x$  的取值范围是（ ）

A.  $x > -5$

B.  $x < -5$

C.  $x \neq -5$

D.  $x \geq -5$

【答案】D

【分析】根据二次根式有意义的条件进行求解即可。

【详解】解：∵式子 $\sqrt{x+5}$ 在实数范围内有意义，

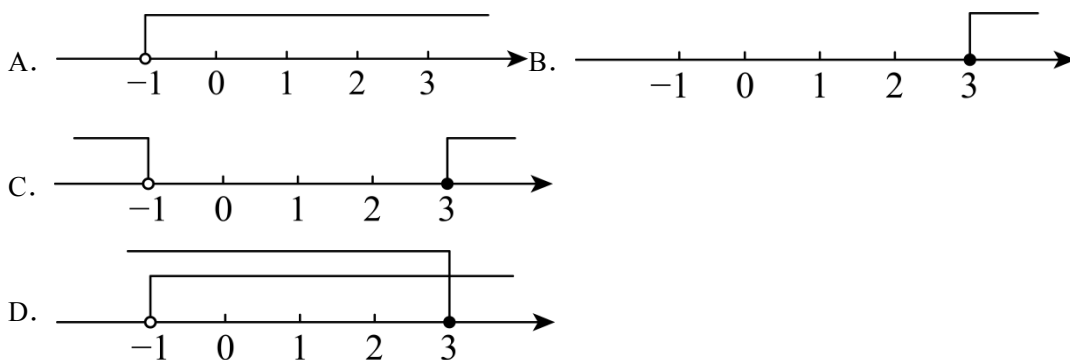
$$\therefore x+5 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -5,$$

故选 D.

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，熟知二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0 是解题的关键.

8. 使等式 $\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}$ 成立的  $x$  的取值范围在数轴上可以表示为 ( )



【答案】B

【分析】根据二次根式有意义的条件列出不等式组求解即可.

【详解】解：由题意可知：
$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases},$$

解得： $x \geq 3$ ,

故选：B.

【点睛】题目主要考查二次根式有意义的条件，解题的关键是熟练运用二次根式有意义的条件.

9. 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 中，自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq -2$  且  $x \neq 0$     B.  $x > -2$  且  $x \neq 0$     C.  $x > 0$     D.  $x \leq -2$

【答案】A

【分析】根据被开方数大于等于 0 和分式的分母不能等于 0 的条件且 $x+2 \geq 0$ ，然后再解不等式即可解答.

【详解】解：由题意得： $x+2 \geq 0$ ，且  $x \neq 0$ ，

所以， $x \geq -2$  且  $x \neq 0$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查函数自变量的取值范围，掌握二次根式有意义和分式有意义的条件是解题的关键.

10. 若  $|x-3y|+\sqrt{y+2}=0$ ，则  $xy$  的值为 ( ).

A. 8

B. 12

C. 5

D. -8

【答案】B

【分析】本题可根据非负数的性质“两个非负数相加，和为0，这两个非负数的值都为0”解出  $x$ 、 $y$  的值，再代入  $xy$  中即可.

【详解】解：依题意得： $x-3y=0$  且  $y+2=0$ ，

解得： $y=-2$ ， $x=-6$

$$\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases} \cdot \text{所以 } xy = -2 \times (-6) = 12$$

故选：B.

【点睛】本题考查了非负数的性质，初中阶段有三种类型的非负数：(1)绝对值；(2)偶次方；(3)二次根式（算术平方根）.当它们相加和为0时，必须满足其中的每一项都等于0.根据这个结论可以求解这类题目.

11. 二次根式  $\sqrt{x-2}$  有意义，则  $x$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $\geq 2$

【分析】本题考查的是二次根式有意义的条件，根据二次根式中的被开方数必须是非负数列出不等式，解不等式即可.

【详解】解：由题意得， $x-2 \geq 0$ ，

解得  $x \geq 2$  .

故答案为： $\geq 2$

12. 使代数式  $\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{3-x}$  有意义的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 3$

【分析】本题考查的是根式有意义的条件和分式有意义的条件，根据四次根式有意义的条件和分式有意义的条件列出不等式，解不等式即可.

【详解】由题意得， $2x-1 \geq 0$ ， $3-x \neq 0$ ，

解得， $x \geq \frac{1}{2}$ ， $x \neq 3$ ，

故答案为： $x \geq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 3$ 。

13. 在函数  $y = \sqrt{2x+10}$  中，自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

【答案】 $x \geq -5$

【分析】本题考查求自变量的取值范围。根据被开方数不为负数，进行求解即可。

【详解】解：由题意，得： $2x+10 \geq 0$ ，

解得： $x \geq -5$ ；

故答案为： $x \geq -5$ 。

14.  $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} + 9$ ，则  $xy$  的平方根为\_\_\_\_\_。

【答案】 $\pm 6$

【分析】利用二次根式有意义的条件可得  $x$ 、 $y$  的值，然后再计算出  $xy$  的值，再利用平方根的定义即可解答。根据二次根式有意义的条件确定  $x$  的值是解题的关键。

【详解】解：由题意可得： $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$ ，解得： $x=4$ ，

$$\therefore y = \sqrt{4-4} + \sqrt{4-4} + 9 = 9，$$

$$\therefore xy = 36，$$

$\therefore xy$  的平方根为  $\pm 6$ 。

故答案为  $\pm 6$ 。

15. 下列各式：①  $\sqrt{(-2)^3}$  ②  $\sqrt{(-2)^4}$  ③  $\sqrt[3]{2}$  ④  $\sqrt{a^2+1}$ ，其中一定是二次根式的是\_\_\_\_\_。（只填序号）

【答案】②④/④②

【分析】本题考查二次根式的定义，根据二次根式的定义逐一判断即可。

【详解】①  $(-2)^3 = -8 < 0$ ，故  $\sqrt{(-2)^3}$  不是二次根式；

②  $(-2)^4 = 16 > 0$ ，故  $\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16}$  是二次根式；

③  $\sqrt[3]{2}$  的根指数是 3，故  $\sqrt[3]{2}$  不是二次根式；

④ 由于  $a^2 \geq 0$ ，因此  $a^2+1 \geq 1 > 0$ ，故  $\sqrt{a^2+1}$  是二次根式；

故答案为：②④。

16. 在函数  $y = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$  中，自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x < 5$

**【分析】** 本题考查函数自变量取值范围，函数自变量取值范围一般考虑两个方面：（1）二次根式被开方数大于等于 0；（2）分式分母不为 0.

**【详解】** 解：∵ 函数  $y = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$  有意义，

$$\therefore 5-x > 0,$$

解得：  $x < 5$ .

故答案为：  $x < 5$ .

17. 若  $x$ 、 $y$  都是实数，且  $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 8$ ，求  $\frac{x}{y} =$ \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{3}{8}$  / 0.375

**【分析】** 本题考查二次根式的非负性，根据  $\sqrt{x-3} \geq 0$  和  $\sqrt{3-x} \geq 0$  可得  $x$  的值，进而求出  $y$  值，代入求解即可，掌握二次根式的非负性是解题的关键.

**【详解】** 解：∵  $\sqrt{x-3} \geq 0$ ， $\sqrt{3-x} \geq 0$ ，

$$\therefore x-3 \geq 0, 3-x \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 3, x \leq 3,$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore y = 8,$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{8},$$

故答案为：  $\frac{3}{8}$ .

18. 函数  $y = \frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$  中，自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \leq 3$  且  $x \neq 2$

**【分析】** 根据二次根式的被开方数是非负数、分式分母不为 0 列出不等式，解不等式得到答案.

**【详解】** 由  $y = \frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$  可得：

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

解得： $x \leq 3$  且  $x \neq 0$  .

**【点睛】** 此题考查了函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分式分母不为0是解题的关键.

## 考向二 二次根式的运算

(1) 二次根式的加减

合并同类二次根式：在二次根式的加减运算中，把几个二次根式化为最简二次根式后，若有同类二次根式，可把同类二次根式合并成一个二次根式.

(2) 二次根式的乘除

乘法法则： $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$ ；

除法法则： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} (a \geq 0, b > 0)$  .

(3) 二次根式的混合运算

二次根式的混合运算顺序与实数的运算顺序一样，先乘方，后乘除，最后加减，有括号的先算括号内的.

在运算过程中，乘法公式和有理数的运算律在二次根式的运算中仍然适用.

### 典例引领

1. 已知  $y = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x} + 18$ ，求代数式  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$  的值.

**【答案】**  $-\sqrt{2}$

**【分析】** 本题考查了二次根式有意义的条件，二次根式的性质. 根据二次根式的被开方数是非负数，求出  $x$  的值，进而得出  $y$  的值，再根据二次根式的性质计算即可. 掌握二次根式有意义的条件是解题关键.

**【详解】解：**  $\because y = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x} + 18$ ，

$\therefore x-8 \geq 0$ ， $8-x \geq 0$ ，

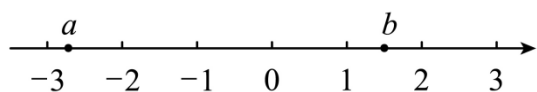
解得： $x \geq 8$  且  $x \leq 8$ ，

$\therefore x = 8$ ，

$\therefore y = \sqrt{8-8} + \sqrt{8-8} + 18 = 18$ ，

$\therefore \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{8} - \sqrt{18} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

2. 实数  $a$ 、 $b$  在数轴上的位置如图所示，化简： $|a+b|+\sqrt{(b-a)^2}$  .



**【答案】**  $-2a$

**【分析】** 此题主要考查了实数与数轴，二次根式的性质与化简，绝对值的性质；先根据数轴得出  $a < 0 < b$ ，且  $|a| > |b|$ ，进而利用二次根式的性质和绝对值的性质化简得出即可.

**【详解】** 解：由数轴可得： $a < 0 < b$ ，且  $|a| > |b|$ ，

则  $a+b < 0$ ， $b-a > 0$ ，

$$|a+b|+\sqrt{(b-a)^2} = |a+b|+|b-a| = -a-b+b-a = -2a .$$

3. 计算： $\sqrt{8}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}+4\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{10}\div\sqrt{5}$  .

**【答案】**  $7\sqrt{2}$

**【分析】** 本题考查二次根式的混合运算，先化简各式，再合并同类二次根式即可.

**【详解】** 解：原式  $= 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\times\sqrt{6} + \sqrt{\frac{1}{8}}\times 16 + \sqrt{10}\div\sqrt{5}$   
 $= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$   
 $= 7\sqrt{2} .$

4. 计算

(1)  $\sqrt[3]{-8} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt{9}$

(2)  $\sqrt{27} + \sqrt{12} \times (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}$

**【答案】** (1)  $-2 + \sqrt{2}$

(2)  $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**【分析】** 本题考查了二次根式的混合运算，负整数指数幂，求一个数的立方根，化简绝对值：

(1) 先化简负整数指数幂，立方根，平方根，化简绝对值，再从左到右依次计算，即可作答.

(2) 根据二次根式的性质化简，以及运用平方差公式化简，即可作答.



正确掌握相关性质内容是解题的关键.

【详解】(1) 解:  $\sqrt[3]{-8} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt{9}$

$$= -2 + (-2) + \sqrt{2} - 1 + 3$$

$$= -4 + \sqrt{2} - 1 + 3$$

$$= -2 + \sqrt{2}$$

(2) 解:  $\sqrt{27} + \sqrt{12} \times (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times (1-3) - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

5. 已知  $x = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$ , 求  $x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y$  的值.

【答案】  $\frac{11}{2} + 2\sqrt{5}$

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值, 熟练掌握二次根式的性质, 灵活进行公式变形是解题的关键. 先求出  $x-y$ ,  $xy$  的值, 然后把  $x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y$  变形后整体代入求解即可.

【详解】 解:  $\because x = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$ ,

$$\therefore x-y = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}, \quad xy = \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 + y^2 - xy - 2x + 2y$$

$$= (x-y)^2 + xy - 2(x-y)$$

$$= (-\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2} - 2 \times (-\sqrt{5})$$

$$= \frac{11}{2} + 2\sqrt{5}.$$

6. 计算:

(1)  $4\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ ;

(2)  $(-2+\sqrt{6})(-2-\sqrt{6}) - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ .

【答案】 (1)  $5\sqrt{2} - 8$

$$(2) -3\frac{1}{3}$$

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，平方差公式以及完全平方公式，熟练掌握相关运算法则是解题关键.

(1) 先将二次根式化简，再计算乘法，最后计算加减法即可；

(2) 先根据平方差公式和完全平方公式，再根据二次根式的混合运算法则计算即可.

【详解】(1) 解：  $4\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - 8$$

$$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8$$

$$= 5\sqrt{2} - 8;$$

(2) 解：  $(-2 + \sqrt{6})(-2 - \sqrt{6}) - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$$= \left[(-2)^2 - (\sqrt{6})^2\right] - \left[(\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$= 4 - 6 - \left(3 - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4 - 6 - 3 + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= -3\frac{1}{3}.$$

7. 计算

(1)  $\sqrt{5} \times \sqrt{15} - \sqrt{12}$ ;

(2)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ;

(3)  $\frac{\sqrt{20} + 5}{\sqrt{5}}$

【答案】(1)  $3\sqrt{3}$

(2) 1

(3)  $2 + \sqrt{5}$

【分析】本题主要考查了根式的混合运算。(1)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/658072142063007004>