

湖南省岳阳市重点中学 2024 届高三下学期一模考试数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ，其中 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，若 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right|$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（ ）

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbb{Z})$
- C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left[k\pi, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbb{Z})$

2. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点. 若 $|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列，且 $|PQ| = |PF_1|$ ，则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{105}}{15}$

3. 半径为 2 的球 O 内有一个内接正三棱柱，则正三棱柱的侧面积的最大值为（ ）

- A. $9\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

4. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化. 如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“——”表示一个阳爻，“-- --”表示一个阴爻）。若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦，这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

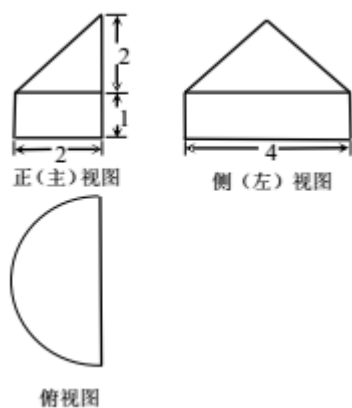
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 依次成等差数列, 则 ()

- A. a, b, c 依次成等差数列
 B. $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 依次成等差数列
 C. a^2, b^2, c^2 依次成等差数列
 D. a^3, b^3, c^3 依次成等差数列

6. 若 $(x-a)(1+3x)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为-45, 则实数 a 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$
 B. 2
 C. $\frac{1}{4}$
 D. $\frac{1}{3}$

7. 某几何体的三视图如图所示, 其俯视图是由一个半圆与其直径组成的图形, 则此几何体的体积是 ()



- A. $\frac{20}{3}\pi$
 B. 6π
 C. $\frac{10}{3}\pi$
 D. $\frac{16}{3}\pi$

8. $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为 ()

- A. -60
 B. -12
 C. 12
 D. 60

9. 已知集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若集合 $A = \{a_i, a_j\} \subseteq M$, 且对任意的 $b \in M$, 存在 $\lambda, \mu \in \{-1, 0, 1\}$ 使得 $b = \lambda a_i + \mu a_j$, 其中 $a_i, a_j \in A$, $1 \leq i \leq j \leq 2$, 则称集合 A 为集合 M 的基底. 下列集合中能作为集合

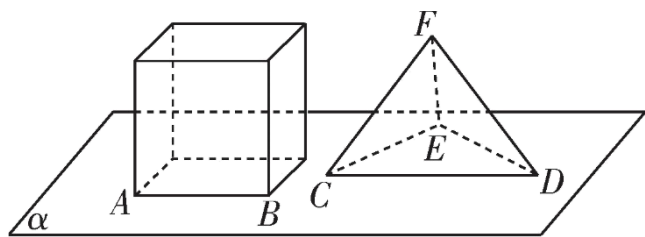
$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的基底的是 ()

- A. $\{1, 5\}$
 B. $\{3, 5\}$
 C. $\{2, 3\}$
 D. $\{2, 4\}$

10. 已知点 $M(2, 0)$, 点 P 在曲线 $y^2 = 4x$ 上运动, 点 F 为抛物线的焦点, 则 $\frac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3}$
 B. $2(\sqrt{5}-1)$
 C. $4\sqrt{5}$
 D. 4

11. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 若正方体的六个面所在的平面与直线 CE , EF 相交的平面个数分别记为 m, n , 则下列结论正确的是 ()



- A. $m = n$ B. $m = n + 2$ C. $m < n$ D. $m + n < 8$

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，过左焦点 F_1 作斜率为 1 的直线交双曲线 C 的右支于点 P ，若线段 PF_1 的中点在圆 $O: x^2 + y^2 = c^2$ 上，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $2\sqrt{2} + 1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 P 是抛物线 $x^2 = 4y$ 上动点， F 是抛物线的焦点，点 A 的坐标为 $(0, -1)$ ，则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为_____.

14. 已知三棱锥 $P-ABC$ ， $PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形， D, E 分别是 PA, AB 的中点， F 为棱 BC 上一动点（点 C 除外）， $\angle CDE = \frac{\pi}{2}$ ，若异面直线 AC 与 DF 所成的角为 θ ，且 $\cos \theta = \frac{7}{10}$ ，则 $CF =$ _____.

15. 正四面体 $ABCD$ 的一个顶点 A 是圆柱 OA 上底面的圆心，另外三个顶点 BCD 圆柱下底面的圆周上，记正四面体 $ABCD$ 的体积为 V_1 ，圆柱 OA 的体积为 V_2 ，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.

16. (5 分) 已知函数 $f(x) = \lg(9x^2 + 1) + x^2 - 1$ ，则不等式 $f(\log_3 x) + f(\log_3 \frac{1}{x}) \leq 2$ 的解集为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_1 = 1$ ， $a_4 \cdot a_5 = 11$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ；

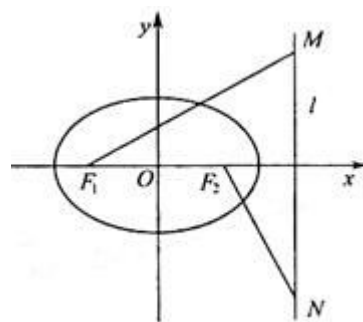
(2) 设 $b_n = a_n \cdot 3^n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，右准线为 l ， M, N 是 l 上的

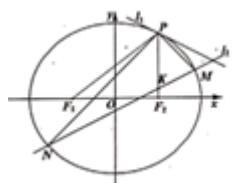
两个动点， $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ 。

(I) 若 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$ ，求 a, b 的值；

(II) 证明: 当 $|MN|$ 取最小值时, $\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.



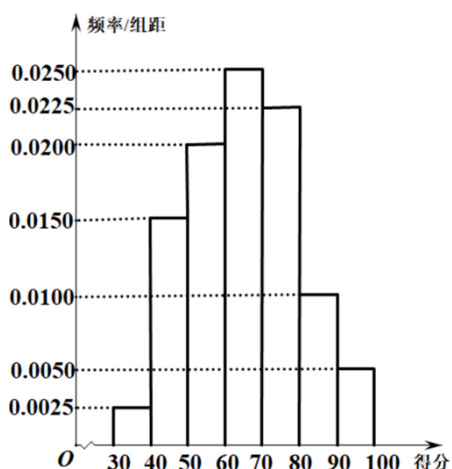
19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{9}{4}$



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 l_1 过点 P , 且与椭圆只有一个公共点, 直线 l_1 与 l_2 的倾斜角互补, 且与椭圆交于异于点 P 的两点 M, N , 与直线 $x=1$ 交于点 K (K 介于 M, N 两点之间), 是否存在直线 l_2 , 使得直线 l_1, l_2, PM, PN 的斜率按某种排序能构成等比数列? 若能, 求出 l_2 的方程, 若不能, 请说理由.

20. (12 分) 为了解广大学生家长对校园食品安全的认识, 某市食品安全检测部门对该市家长进行了一次校园食品安全网络知识问卷调查, 每一位学生家长仅有一次参加机会, 现对有效问卷进行整理, 并随机抽取出了 200 份答卷, 统计这些答卷的得分 (满分: 100 分) 制出的频率分布直方图如图所示, 由频率分布直方图可以认为, 此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$, 其中 μ 近似为这 200 人得分的平均值 (同一组数据用该组区间的中点值作为代表).



(1) 请利用正态分布的知识求 $P(36 < Z \leq 79.5)$;

(2) 该市食品安全检测部门为此次参加问卷调查的学生家长制定如下奖励方案:

①得分不低于 μ 的可以获赠 2 次随机话费，得分低于 μ 的可以获赠 1 次随机话费：

②每次获赠的随机话费和对应的概率为：

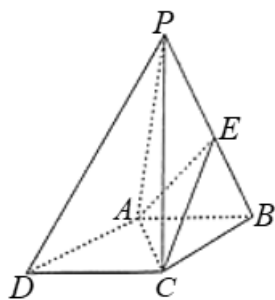
获赠的随机话费（单位：元）	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

市食品安全检测部门预计参加此次活动的家长约 5000 人，请依据以上数据估计此次活动可能赠送出多少话费？

附：① $\sqrt{210} \approx 14.5$ ；②若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ；则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$ ，

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$ 。

21. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $PA = 2$ ， $PB = PC = PD$ ， E 是 PB 的中点。



(1) 证明： $PD \parallel$ 平面 AEC ；

(2) 设 F 是线段 DC 上的动点，当点 E 到平面 PAF 距离最大时，求三棱锥 $P-AFE$ 的体积。

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \cos \alpha \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$
 以原点 O 为极点， x 轴

的正半轴为极轴，且两个坐标系取相等的长度单位，建立极坐标系。

(1) 设直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{12}$ ，若直线 l 与曲线 C 交于两点 A 、 B ，求 AB 的长；

(2) 设 M 、 N 是曲线 C 上的两点，若 $\angle MON = \frac{\pi}{2}$ ，求 $\triangle OMN$ 面积的最大值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

$\forall x \in R, f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| \Rightarrow f(x)_{\max} = \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = 1$ ，从而可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ， $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，再解不等式

$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 即可。

【详解】

由已知， $f(x)_{\max} = \left| f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \right| = 1$

$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，

解得， $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ 。

故选：A.

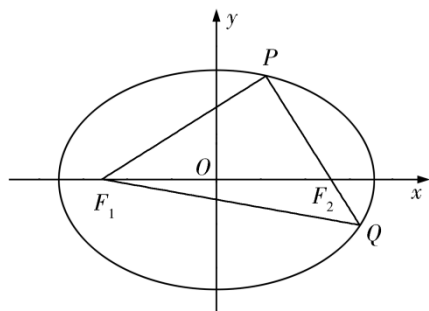
【点睛】

本题考查求正弦型函数的单调区间，涉及到恒成立问题，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题。

2、D

【解析】

如图所示，设 $|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列 $\{a_n\}$ ，其公差为 d 。



根据椭圆定义得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a$ ，又 $a_1 + a_2 = a_3$ ，则 $\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 4a \\ a_1 + (a_1 + d) = a_1 + 2d \end{cases}$ ，解得 $d = \frac{2}{5}a$ ，

$a_1 = \frac{2}{5}a, a_2 = \frac{4}{5}a, a_3 = \frac{6}{5}a, a_4 = \frac{8}{5}a$ 。所以 $|QF_1| = \frac{8}{5}a$ ， $|PF_1| = \frac{6}{5}a$ ， $|PF_2| = \frac{4}{5}a$ ， $|PQ| = \frac{6}{5}a$ 。

在 $\triangle PF_1F_2$ 和 VPF_1Q 中, 由余弦定理得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{(\frac{4}{5}a)^2 + (\frac{6}{5}a)^2 - (2c)^2}{2 \cdot \frac{4}{5}a \cdot \frac{6}{5}a} = \frac{(\frac{6}{5}a)^2 + (\frac{6}{5}a)^2 - (\frac{8}{5}a)^2}{2 \cdot \frac{6}{5}a \cdot \frac{6}{5}a}$, 整理解得

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{105}}{15}, \text{ 故选 D.}$$

3、B

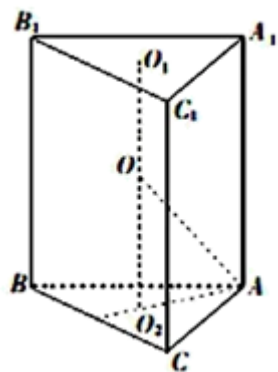
【解析】

设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 , 底面边长与高分别为 x, h , 利用 $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$, 可得

$$h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2, \text{ 进一步得到侧面积 } S = 3xh, \text{ 再利用基本不等式求最值即可.}$$

【详解】

如图所示. 设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1, O_2 , 底面边长与高分别为 x, h , 则 $O_2A = \frac{\sqrt{3}}{3}x$,



$$\text{在 Rt}\triangle OAO_2 \text{ 中, } \frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 4, \text{ 化为 } h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2,$$

$$QS = 3xh,$$

$$\therefore S^2 = 9x^2h^2 = 12x^2(12 - x^2), \quad 12\left(\frac{x^2 + 12 - x^2}{2}\right)^2 = 432,$$

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ 时取等号, 此时 $S = 12\sqrt{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查正三棱柱与球的切接问题, 涉及到基本不等式求最值, 考查学生的计算能力, 是一道中档题.

4、B

【解析】

基本事件总数为6个，都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为3个，由此求出概率.

【详解】

解：由图可知，含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦，

取出两卦的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（巽，乾），（离，兑），（离，乾），（兑，乾）共6个，其中符合条件的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（离，兑）共3个，

所以，所求的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

5、C

【解析】

由等差数列的性质、同角三角函数的关系以及两角和的正弦公式可得 $2 \cos B = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C}$ ，由正弦定理可得

$2a \cos B = b^2$ ，再由余弦定理可得 $a^2 + c^2 = 2b^2$ ，从而可得结果.

【详解】

Q $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 依次成等差数列，

$$\therefore \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}, \frac{\cos A \sin C + \sin A \cos C}{\sin A \sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{2 \cos B}{\sin B},$$

$$2 \cos B = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C} \quad \text{正弦定理得 } 2a \cos B = b^2,$$

由余弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 = b^2$ ， $a^2 + c^2 = 2b^2$ ，即 a^2, b^2, c^2 依次成等差数列，故选 C.

【点睛】

本题主要考查等差数列的定义、正弦定理、余弦定理，属于难题. 解三角形时，有时可用正弦定理，有时也可用余弦定理，应注意用哪一个定理更方便、简捷. 如果式子中含有角的余弦或边的二次式，要考虑用余弦定理；如果遇到的式子中含有角的正弦或边的一次式时，则考虑用正弦定理；以上特征都不明显时，则要考虑两个定理都有可能用到.

6、D

【解析】

将多项式的乘法式展开，结合二项式定理展开式通项，即可求得 a 的值.

【详解】

$$\because (x-a)(1+3x)^6 = x(1+3x)^6 - a(1+3x)^6$$

所以展开式中 x^3 的系数为 $C_6^2 3^2 - aC_6^3 3^3 = 135 - 540a = -45$,

$$\therefore \text{解得 } a = \frac{1}{3}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查了二项式定理展开式通项的简单应用, 指定项系数的求法, 属于基础题.

7、C

【解析】

由三视图可知, 该几何体是下部是半径为 2, 高为 1 的圆柱的一半, 上部为底面半径为 2, 高为 2 的圆锥的一半, 所以,

半圆柱的体积为 $V_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \pi \times 1 = 2\pi$, 上半圆锥的体积为 $V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\pi \times 2^2 = \frac{4\pi}{3}$, 所以该几何体的体积为

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}, \text{ 故应选 } C.$$

8、B

【解析】

在二项展开式的通项公式中, 令 x 的幂指数等于 3, 求出 r 的值, 即可求得含 x^3 项的系数.

【详解】

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6 \text{ 的展开式通项为 } T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_6^r \cdot (-2)^r \cdot x^{6-3r},$$

令 $6-3r=3$, 得 $r=1$, 可得含 x^3 项的系数为 $C_6^1 \times (-2) = -12$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用, 二项展开式的通项公式, 二项式系数的性质, 属于基础题.

9、C

【解析】

根据题目中的基底定义求解.

【详解】

$$\text{因为 } 1 = -1 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$2 = 1 \times 2 + 0 \times 3,$$

$$3 = 0 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$4 = 1 \times 2 + 1 \times 2,$$

$$5 = 1 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$6 = 1 \times 3 + 1 \times 3,$$

所以 $\{2, 3\}$ 能作为集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的基底,

故选: C

【点睛】

本题主要考查集合的新定义, 还考查了理解辨析的能力, 属于基础题.

10、D

【解析】

如图所示: 过点 P 作 PN 垂直准线于 N , 交 y 轴于 Q , 则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$, 设 $P(x, y)$, $x > 0$, 则

$$\frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = x + \frac{4}{x}, \text{ 利用均值不等式得到答案.}$$

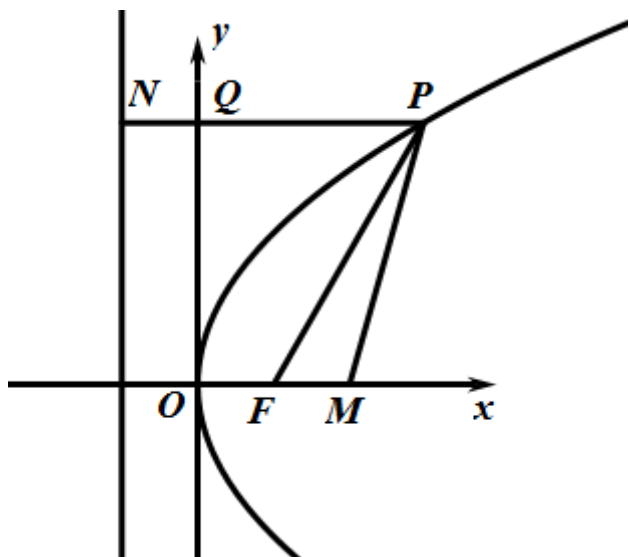
【详解】

如图所示: 过点 P 作 PN 垂直准线于 N , 交 y 轴于 Q , 则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$,

$$\text{设 } P(x, y), x > 0, \text{ 则 } \frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = \frac{|PM|^2}{|PQ|} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x} = \frac{(x-2)^2 + 4x}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 4,$$

当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ 时等号成立.

故选: D.



【点睛】

本题考查了抛物线中距离的最值问题, 意在考查学生的计算能力和转化能力.

11、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/665022101043011200>