2023年北京市海淀区高考数学二模试卷

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{0,1\}$，则（　　）

A．$A\subsetneq B$　　B．$B\subsetneq A$　　C．$A=B$　　D．$A\cap B=\emptyset$

2．在平面直角坐标系xOy中，角α以Ox为始边，其终边经过点P（1，2），则sinα=（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

3．若$(2-x)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中常数项为32，则n=（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

4．下列函数中，既是奇函数又在区间（0，1）上单调递增的是（　　）

A．$y=lgx$　　B．$y=\frac{2}{x}$　　C．$y=2^{|x|}$　　D．$y=\tan x$

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3$，$a_1-a_2=a_3$，则S_n的最大值为（　　）

A．7　　B．6　　C．5　　D．4

6．已知抛物线C：$y^2=4x$，经过点P的任意一条直线与C均有公共点，则点P的坐标可以为（　　）

A．（0，1）　　B．（1，－3）　　C．（3，4）　　D．（2，－2）

7．芯片是科技产品中的重要元件，其形状通常为正方形．生产芯片的原材料中可能会存在坏点，而芯片中出现坏点即报废，通过技术革新可以减小单个芯片的面积，这样在同样的原材料中可以切割出更多的芯片，同时可以提高芯片生产的产品良率．产品良率$=\frac{\text{切割得到的无坏点的芯片数}}{\text{切割得到的所有芯片数}}\times 100\%$．在芯片迭代升级过程中，每一代芯片的面积为上一代的$\frac{1}{2}$．图1是一块形状为正方形的芯片原材料，上面有4个坏点，若将其按照图2的方式切割成4个大小相同的正方形，得到4块第3代芯片，其中只有一块无坏点，则由这块原材料切割得到第3代芯片的产品良率为25%．若将这块原材料切割成16个大小相同的正方形，得到16块第5代芯片，则由这块原材料切割得到第5代芯片的产品良率为（　　）

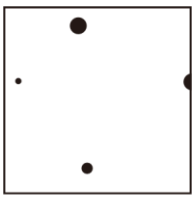


图1(原材料)

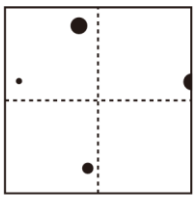


图2(第3代)

A．50%　　B．62.5%　　C．75%　　D．87.5%

8．已知正方形$ABCD$所在平面与正方形$CDEF$所在平面互相垂直，且$CD=2$，P是对角线CE的中点，Q是对角线BD上一个动点，则P，Q两点之间距离的最小值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\sqrt{6}$

9．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是平面内两个非零向量，那么“$\vec{a} \parallel \vec{b}$”是“存在λ≠0，使得$|\vec{a}+\lambda\vec{b}|=|\vec{a}|+|\lambda\vec{b}|$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知动直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，且$\angle AOB=120°$．若 l 与圆（$x-2$）$^2+y^2=25$ 相交所得的弦长为 t，则 t 的最大值与最小值之差为（　　）

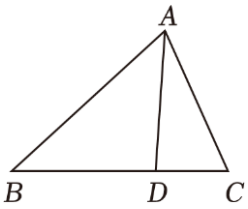
A．$10-4\sqrt{6}$　　B．1　　C．$4\sqrt{6}-8$　　D．2

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．在复平面内，复数 z 所对应的点的坐标为（1，－1），则 $z\cdot\bar{z}=$_____.

12．已知双曲线 C 经过点（2，0），渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则 C 的标准方程为_____.

13．如图，在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，$AD=BD=4$，$CD=2$，$AC=3\sqrt{2}$，则 cos∠ADC=_____；△ABD 的面积为_____.



14．设函数 f（x）＝sinωx，g（x）＝mx^3.

①若$\omega=\frac{\pi}{2}$，$m=1$，则不等式 f（x）＞g（x）的解集为 _____；

②若$\omega=\frac{\pi}{4}$，且不等式 f（x）＞g（x）的解集中恰有一个正整数，则 m 的取值范围是 _____.

15．在数列{x_n}中，x_1＝1，x_2＝2．设向量$\vec{a_n}=(x_n，x_{n+1})$，已知$\vec{a_n}\cdot(\vec{a_{n+1}}-\vec{a_n})=0$（$n$＝1，2，…），给出下列四个结论：①$x_3$＝3；②∀$n$∈$\mathbf{N}^*$，$x_n$＞0；③∀$n$∈$\mathbf{N}^*$，$x_{n+2}$＞$x_n$；④∀$n$∈$\mathbf{N}^*$，$x_{n+1}$≠$x_n$．其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16．（13 分）已知函数$f(x)=asinxcosx+cos(2x+\frac{\pi}{6})$，且$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$.

（1）求 a 的值和 f（x）的最小正周期；

（2）求 f（x）在[0，π]上的单调递增区间.

17．（14 分）某大学 A 学院共有学生 1000 人，其中男生 640 人，女生 360 人．该学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况，按性别分层抽样，从该学院所有学生中抽取若干人作为样本，对样本中的每位学生在 5 月份的累计跑步里程进行统计，得到下表．

跑步里程 s	0≤s＜30	30≤s＜60	60≤s＜90	s≥90

（km）				
男生	a	12	10	5
女生	6	6	4	2

（1）求 a 的值，并估计 A 学院学生 5 月份累计跑步里程 s（km）在[0，30）中的男生人数；

（2）从 A 学院样本中 5 月份累计跑步里程不少于 90（km）的学生中随机抽取 3 人，其中男生人数记为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（3）该大学 B 学院男生与女生人数之比为 λ，B 学院体育社团为了解学生参与跑步运动的情况，也按性别进行分层抽样．已知 A 学院和 B 学院的样本数据整理如下表．

5 月份累计跑步里程平均值（单位：km）

学院性别	A	B
男生	50	59
女生	40	45

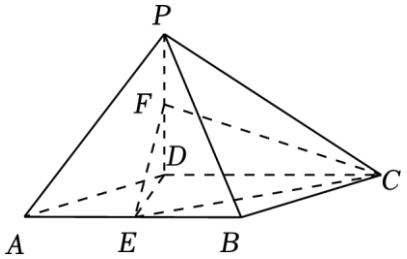
设 A 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为$\overline{x}_A$，B 学院样本中学生 5 月份累计跑步里程平均值为$\overline{x}_B$，是否存在 λ，使得$\overline{x}_A \geq \overline{x}_B$？如果存在，求 λ 的最大值；如果不存在，说明理由．

18．（13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，E，F 分别为 AB，PD 的中点．

（1）求证：EF∥平面 PBC；

（2）若$AD=2\sqrt{3}$，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求 PD 的长．

条件①：$DE\perp PC$；条件②：$PB=PC$．



19．（15 分）已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，上、下顶点分别为 B_1，B_2，直线 AB_1 的方程为$x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$．

（1）求椭圆 E 的方程及离心率；

（2）P 是椭圆上一点，且在第一象限内，M 是点 P 关于 x 轴的对称点．过 P 作垂直于 y 轴的直线交直线 AB_1 于点 Q，再过 Q 作垂直于 x 轴的直线交直线 PB_2 于点 N．求∠MNQ 的大小．

20．（15 分）已知函数$f(x)=\sqrt{x}lnx$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程；

（2）求证：$f(x)<x$；

（3）若函数 $g(x)=f(x)+a(x^2-x)$ 在区间（1，+∞）上无零点，求 a 的取值范围．

21．（15 分）设 λ 为整数．有穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，其项数为 m（$m\geq 2$）．若$\{a_n\}$满足如下两个性质，则称$\{a_n\}$为 P_λ 数列：①$a_m=1$，且 $a_i\neq 1$（$i=1,2,\cdots,m-1$）；②$a_{n+1}=\begin{cases}|\lambda a_n+1|，a为奇数\\ \frac{a_n}{2}，a_n为偶数\end{cases}$（$n=1,2,\cdots,m-1$）

（1）若$\{a_n\}$为 P_1 数列，且 $a_1=5$，求 m；

（2）若$\{a_n\}$为 P_{-1} 数列，求 a_1 的所有可能值；

（3）若对任意的 P_1 数列$\{a_n\}$，均有 $m\leq 2\log_2 a_1+d$，求 d 的最小值．

2023年北京市海淀区高考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{0,1\}$，则（　　）

A．$A\subsetneq B$　　B．$B\subsetneq A$　　C．$A=B$　　D．$A\cap B=\emptyset$

解：集合$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{0,1\}$，则$B\subsetneq A$．$A\cap B=B=\{0,1\}$．

故选：B．

2．在平面直角坐标系xOy中，角α以Ox为始边，其终边经过点$P(1,2)$，则$\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

解：由三角函数的定义可知$sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：A．

3．若$(2-x)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中常数项为32，则$n=$（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

解：$(2-x)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式通项为$T_{k+1}=C_n^k\cdot 2^{n-k}\cdot(-x)^k$.

故常数项为$T_1=C_n^0\cdot 2^n=32$，得$n=5$.

故选：A．

4．下列函数中，既是奇函数又在区间（0，1）上单调递增的是（　　）

A．$y=lgx$　　B．$y=\frac{2}{x}$　　C．$y=2^{|x|}$　　D．$y=\tan x$

解：对于A，$y=lgx$的定义域为（0，+∞），定义域不关于原点对称，所以为非奇非偶函数，故A错误，

对于B，$f(x)=\frac{2}{x}$的定义域为（-∞，0）∪（0，+∞），定义域关于原点对称，又$f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数，但在（0，1）单调递减，故B错误，

对于C，$f(x)=2^{|x|}$的定义域为$\mathbf{R}$，关于原点对称，又$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数，故$C$错误，

对于D，$f(x)=\tan x$，由正切函数的性质可知$f(x)=\tan x$为奇函数，且在（0，1）单调递增，故D正确，

故选：D．

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3$，$a_1-a_2=a_3$，则S_n的最大值为（　　）

A．7　　B．6　　C．5　　D．4

解：设公差为 d，因为 $a_1=3$，$a_1-a_2=a_3$，

所以 $a_1-(a_1+d)=a_1+2d$，解得 $d=-1$，

所以 $a_n=3+(n-1)\times(-1)=4-n$，令 $a_n\geqslant 0$，解得 $n\leqslant 4$，

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时 S_n 取得最大值，且 $(S_n)_{max}=3+2+1+0=6$.

故选：B.

6．已知抛物线 C：$y^2=4x$，经过点 P 的任意一条直线与 C 均有公共点，则点 P 的坐标可以为（　　）

A．（0，1）　　B．（1，－3）　　C．（3，4）　　D．（2，－2）

解：∵（0，1）在 y 轴上，∴（0，1）在抛物线外部，

将 $x=1$ 代入抛物线 C：$y^2=4x$ 中，则 $|y|=2<3$，∴（1，－3）在抛物线外部，

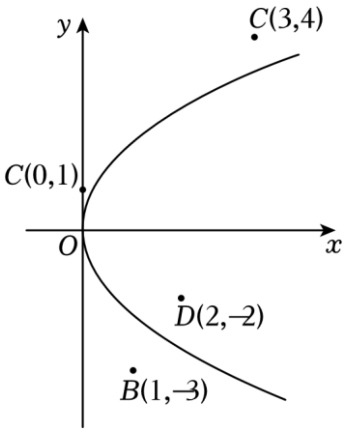
将 $x=3$ 代入抛物线 C：$y^2=4x$ 中，则 $|y|=2\sqrt{3}<4$，∴（3，4）在抛物线外部，

将 $x=2$ 代入抛物线 C：$y^2=4x$ 中，则 $|y|=2\sqrt{2}>2$，∴（2，－2）在抛物线内部，

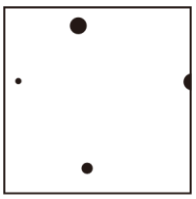
将选项中的点分别在直角坐标系中画出来，只有点 D（2，－2）在抛物线内部，

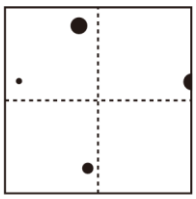
故当点 P 位于点 D（2，－2）处，此时经过点 P 的任意一条直线与 C 均相交，故均有公共点，

故选：D.



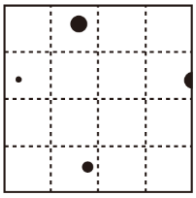
7．芯片是科技产品中的重要元件，其形状通常为正方形．生产芯片的原材料中可能会存在坏点，而芯片中出现坏点即报废，通过技术革新可以减小单个芯片的面积，这样在同样的原材料中可以切割出更多的芯片，同时可以提高芯片生产的产品良率．产品良率 $=\frac{\text{切割得到的无坏点的芯片数}}{\text{切割得到的所有芯片数}}\times 100\%$．在芯片迭代升级过程中，每一代芯片的面积为上一代的 $\frac{1}{2}$．图 1 是一块形状为正方形的芯片原材料，上面有 4 个坏点，若将其按照图 2 的方式切割成 4 个大小相同的正方形，得到 4 块第 3 代芯片，其中只有一块无坏点，则由这块原材料切割得到第 3 代芯片的产品良率为 25%．若将这块原材料切割成 16 个大小相同的正方形，得到 16 块第 5 代芯片，则由这块原材料切割得到第 5 代芯片的产品良率为（　　）


图1(原材料)


图2(第3代)

A．50%　　B．62.5%　　C．75%　　D．87.5%

解：依题意将这块原材料如下切割得到第 5 代芯片，其中 12 块无坏点，4 块有坏点，



故第 5 代芯片的产品良率为$\frac{12}{16} \times 100\% = 75\%$.

故选：*C*.

8．已知正方形 *ABCD* 所在平面与正方形 *CDEF* 所在平面互相垂直，且 *CD*＝2，*P* 是对角线 *CE* 的中点，*Q* 是对角线 *BD* 上一个动点，则 *P*，*Q* 两点之间距离的最小值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\sqrt{6}$

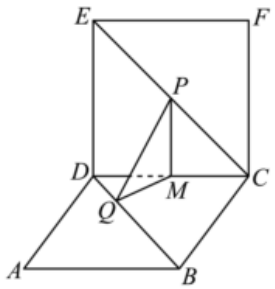
解：取 *CD* 边的中点为 *M*，连接 *PM*，*QM*，*PQ*，*P* 是 *CE* 的中点，则 *PM*⊥*CD*，

由于 *PM*⊥*CD*，平面 *ABCD*⊥平面 *CDEF*，平面 *ABCD*∩平面 *CDEF*＝*CD*，*PM*⊂平面 *CDEF*，故 *PM*⊥平面 *ABCD*，*QM*⊂平面 *ABCD*，故 *PM*⊥*QM*，

在直角三角形 *PMQ* 中，$PM = \frac{1}{2}ED = 1$，$PQ = \sqrt{PM^2 + QM^2} = \sqrt{1 + QM^2}$，

要使 *PQ* 最小，则 *QM* 最小，故当 *QM*⊥*BD* 时，此时 *QM* 最小，故 *QM* 的最小值为$\frac{1}{4}BD = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$|PQ|_{min} = \sqrt{1 + QM^2} = \sqrt{1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，、

故选：*C*.



9．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是平面内两个非零向量，那么“$\vec{a} \parallel \vec{b}$”是“存在 λ≠0，使得$|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\vec{a}| + |\lambda\vec{b}|$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解：已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是平面内两个非零向量，

若$\vec{a} \parallel \vec{b}$，则存在唯一的实数 μ≠0，使得$\vec{a} = \mu\vec{b}$，故$|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\mu\vec{b} + \lambda\vec{b}| = |\mu + \lambda||\vec{b}|$，而$|\vec{a}| + |\lambda\vec{b}| = |\mu\vec{b}| + |\lambda\vec{b}| = (|\lambda| + |\mu|)|\vec{b}|$，

由于存在 λ 使得|λ+μ|=|λ|+|μ|成立，所以充分性成立，

若 λ≠0 且$|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\vec{a}| + |\lambda\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\lambda\vec{b}$方向相同，故此时$\vec{a} \parallel \vec{b}$，所以“$\vec{a} \parallel \vec{b}$”是“存在 λ≠0，使得$|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\vec{a}| + |\lambda\vec{b}|$”的必要条件，

故“$\vec{a} \parallel \vec{b}$”是“存在 λ≠0，使得$|\vec{a} + \lambda\vec{b}| = |\vec{a}| + |\lambda\vec{b}|$”的充分必要条件.

故选：*C*.

10．已知动直线 *l* 与圆 *O*：$x^2+y^2=4$ 交于 *A*，*B* 两点，且∠*AOB*＝120°．若 *l* 与圆（*x*﹣2）$^2+y^2=25$ 相交所得的弦长为 *t*，则 *t* 的最大值与最小值之差为（　　）

A．$10-4\sqrt{6}$　　B．1　　C．$4\sqrt{6}-8$　　D．2

解：由题意可知圆（*x*﹣2）$^2+y^2=25$ 的圆心（2，0）在圆 *O*：$x^2+y^2=4$ 上，

则当动直线经过圆心，即点 *A* 或 *B* 与圆心（2，0）重合时，如图 1，

此时弦长 *t* 取得最大值，且最大值为 t_{max}＝2×5＝10；

设线段 *AB* 的中点为 *C*，

在△*AOB* 中，由 *OA*＝*OB*＝2，且∠*AOB*＝120°，则 *OC*＝1，

则动直线 *l* 在圆 $x^2+y^2=1$ 上做切线运动，

所以当动直线 *l* 与 *x* 轴垂直，且点 *C* 的坐标为（﹣1，0）时，如图 2，

此时弦长 *t* 取得最小值，且最小值为$t_{min} = 2 \times \sqrt{5^2 - 3^2} = 8$，

所以 *t* 的最大值与最小值之差为 2.

故选：*D*.

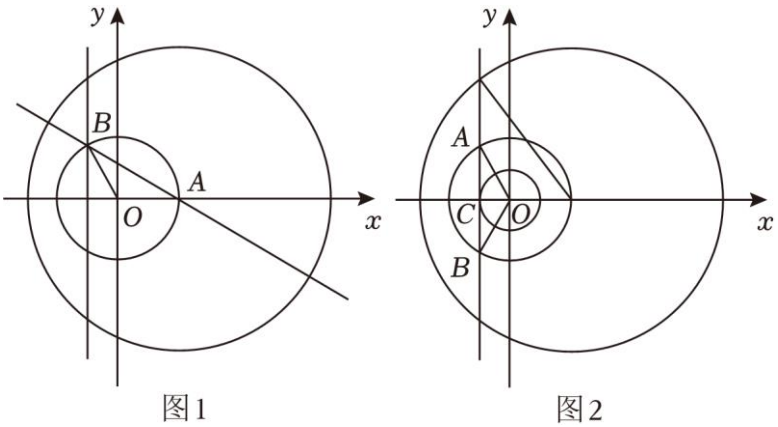


图1　　图2

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．在复平面内，复数 z 所对应的点的坐标为（1，﹣1），则 $z\cdot\overline{z}=$ 2 .

解：∵在复平面内，复数 z 所对应的点的坐标为（1，﹣1），

∴$z=1-i$，

∴$z\cdot\overline{z}=(1-i)\cdot(1+i)=1-i^2=2$.

故答案为：2.

12．已知双曲线 C 经过点（2，0），渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

解：由已知可得，双曲线的焦点位于 x 轴上，

设 C 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

因为双曲线 C 经过点（2，0），所以 $a=2$，

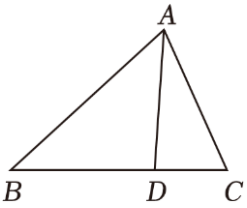
则双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{b}{2}x$，所以$b=\sqrt{2}$，

所以，C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

13．如图，在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，$AD=BD=4$，$CD=2$，$AC=3\sqrt{2}$，则 $\cos\angle ADC=$ $\frac{1}{8}$；

△ABD 的面积为 $3\sqrt{7}$.



解：在△ADC 中由余弦定理 $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$，

即$(3\sqrt{2})^2=4^2+2^2-2\times4\times2cos\angle ADC$，解得$cos\angle ADC=\frac{1}{8}$，

所以$sin\angle ADC=\sqrt{1-cos^2\angle ADC}=\frac{\sqrt{63}}{8}$，

所以$sin\angle ADB=sin(\pi-\angle ADC)=sin\angle ADC=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BDsin\angle ABD=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=3\sqrt{7}$.

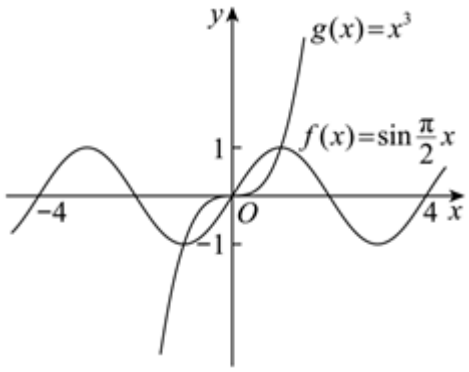
故答案为：$\frac{1}{8}$；$3\sqrt{7}$.

14．设函数 $f(x)=\sin\omega x$，$g(x)=mx^3$.

①若$\omega=\frac{\pi}{2}$，$m=1$，则不等式 $f(x)>g(x)$ 的解集为 （﹣∞，﹣1）∪（0，1） ；

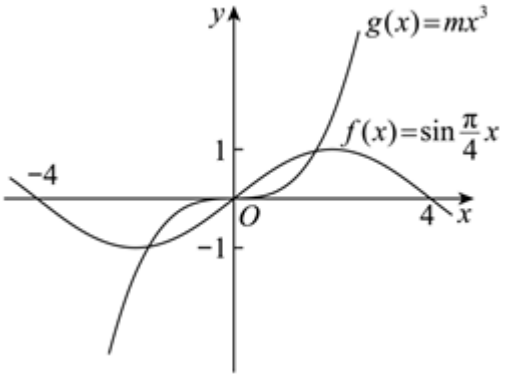
②若$\omega=\frac{\pi}{4}$，且不等式f（x）$>g$（x）的解集中恰有一个正整数，则 m 的取值范围是 $[\frac{1}{8}，\frac{\sqrt{2}}{2})$.

解：①当$\omega=\frac{\pi}{2}$，$m=1$时，$f(x)=sin\frac{\pi}{2}x$和 g（x）$=x^3$ 的图象如图所示，



由图象可得当 $x\in$（$-\infty$，-1）$\cup$（0，1）时，f（x）$>g$（x）；

②当$\omega=\frac{\pi}{4}$时，$f(x)=sin\frac{\pi}{4}x$的图象如图所示，



若不等式f（x）$>g$（x）的解集中恰有一个正整数，

则由图象可得$\begin{cases}f(1)>g(1)\\f(2)\le g(2)\end{cases}$，即$\begin{cases}sin\frac{\pi}{4}>m\\sin\frac{\pi}{2}\le 8m\end{cases}$，解得$m\in[\frac{1}{8}，\frac{\sqrt{2}}{2})$.

故答案为：（$-\infty$，-1）$\cup$（0，1）；$[\frac{1}{8}，\frac{\sqrt{2}}{2})$.

15．在数列{x_n}中，x_1=1，x_2=2．设向量$\vec{a_n}=(x_n，x_{n+1})$，已知$\vec{a_n}\cdot(\vec{a_{n+1}}-\vec{a_n})=0$（$n$=1，2，…），给出下列四个结论：①$x_3$=3；②$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_n>0$；③$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_{n+2}>x_n$；④$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_{n+1}\neq x_n$．其中所有正确结论的序号是 ②③④ .

解：对于①，由已知可得$\vec{a_1}=(x_1，x_2)=(1，2)$，$\vec{a_2}=(x_2，x_3)=(2，x_3)$，

所以，$\vec{a_2}-\vec{a_1}=(1，x_3-2)$.

因为$\vec{a_1}\cdot(\vec{a_2}-\vec{a_1})=0$，所以有 1×1+2（$x_3$﹣2）=0，解得$x_3=\frac{3}{2}$，故①错误；

对于②，$\vec{a_2}=(2，\frac{3}{2})$，$\vec{a_3}=(x_3，x_4)=(\frac{3}{2}，x_4)$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/665221213203011040