

专题 8-2 立体几何中平行的证明与应用

模块一

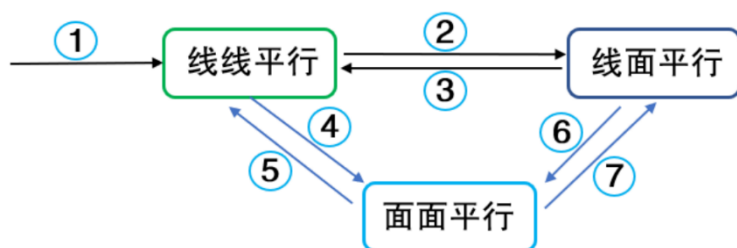
热点题型解读 (目录)

- 【题型 1】平行关系的判断
- 【题型 2】构造平行四边形得到平行关系
- 【题型 3】由中位线得出平行关系
- 【题型 4】由线面平行得出线线平行 (反推找线)
- 【题型 5】由面面平行得出线面平行
- 【题型 6】两个平面交线相关的平行证明
- 【题型 7】证明线线平行
- 【题型 8】通过平行证明四点共面
- 【题型 9】平行关系的应用: 等积变形求体积
- 【题型 10】平行的存在性问题 (确定点的位置)
- 【题型 11】平行的存在性问题 (确定动点轨迹)
- 【题型 12】截面问题 (通过作平行线或延长线补全截面)

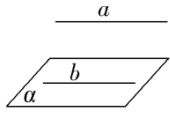
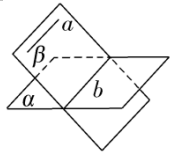
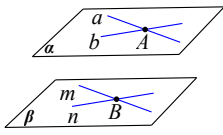
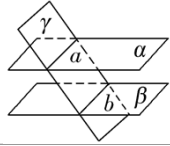
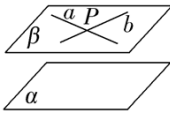
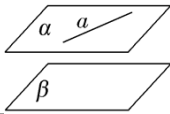
模块二

核心题型·举一反三

平行关系思维导图



序号	图形展示	符号语言	文字语言
1			① 垂直于同一平面的两个直线平行 ② 如果两条直线分别与第三条直线平行则这两条直线平行 ③ 线段成比例两直线平行 (中位线) ④ 平行四边形对面平行

2		$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行
3		$\left. \begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$	一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行
4		$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ m, n \subset \beta \\ m \cap n = B \\ a \parallel m, b \parallel n \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$	一个平面内的两条相交直线与另一个平面内的两条相交直线分别平行，那么这两个平面平行
5		$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行
6		$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \beta \\ a \cap b = P \\ a \parallel \alpha \\ b \parallel \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$	一个平面内的两条相交直线分别与另一个平面平行，则这两个平面平行
7		$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \beta$	两个平面平行，则其中一个平面内的任意一条直线与另一个平面平行

【题型 1】平行关系的判断

基础知识

常用结论

- (1) 垂直于同一条直线的两个平面平行，即若 $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$.
- (2) 平行于同一个平面的两个平面平行，即若 $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$, 则 $\alpha \parallel \gamma$.
- (3) 垂直于同一个平面的两条直线平行，即 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, 则 $a \parallel b$.
- (4) 若 $\alpha \parallel \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $m \parallel \beta$.

【例 1】(2024·山东淄博·二模) 已知 α , β , γ 为三个不同的平面, a , b , l 为三条不同的直线.

若 $\alpha \perp \beta = l$, $\alpha \perp \gamma = a$, $\beta \perp \gamma = b$, $l \parallel \gamma$,

则下列说法正确的是 ()

- A. a 与 l 相交 B. b 与 l 相交 C. $a \parallel b$ D. a 与 β 相交

【例 2】已知 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 下列命题正确的是 ()

- A. 若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \gamma$;
- B. 若 $m // n, n \subset \alpha$, 则 $m // \alpha$;
- C. 若 m, n 是异面直线, $m \subset \alpha, m // \beta, n \subset \beta, n // \alpha$, 则 $\alpha // \beta$;
- D. 平面 α 内有不共线的三点到平面 β 的距离相等, 则 $\alpha // \beta$.

【例 3】(多选) 已知平面 α, β, γ , 且 $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n$, 则下列结论正确的是 ()

- A. m 与 n 可能是异面直线
- B. 若 $l // m$, 则 $m // n$
- C. 若 $m \cap n = O$, 则 $O \in l$
- D. 若 α, β, γ 两两垂直, 则 l, m, n 也两两垂直

【巩固练习 1】下列关于平面平行的命题, 正确的是 ()

- A. 若一个平面内的无数条直线与另一个平面平行, 则这两个平面平行
- B. 若一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行, 则这两个平面平行
- C. 若两个平面与同一个平面垂直, 则这两个平面平行
- D. 若两个平面与同一条直线平行, 则这两个平面平行

【巩固练习 2】设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m // n, m // \alpha$, 则 $n // \alpha$
- B. 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m // n$
- C. 若 $m // n, n \subset \beta$, 则 $m // \alpha$
- D. 若 $m // n, m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$

【巩固练习 3】已知 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 对于下列命题正确的是 ()

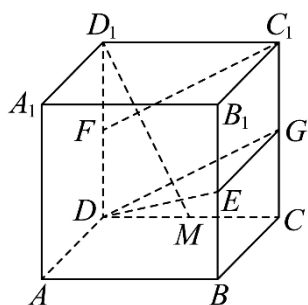
- A. $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m // \beta, n // \beta \Rightarrow \alpha // \beta$
- B. $\alpha // \beta, m \subset \alpha \Rightarrow m // \beta$;
- C. $n // m, n \subset \alpha \Rightarrow m // \alpha$
- D. $m // \alpha, n \subset \alpha \Rightarrow m // n$.

【题型 2】构造平行四边形得到平行关系

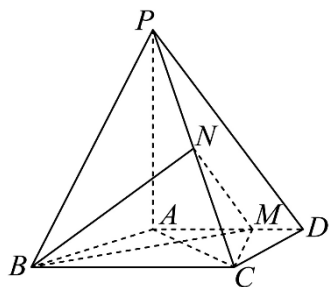
基础知识

【方法技巧】构造平行四边形找线线平行

【例 1】如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 及 G 分别为棱 BB_1 、 DD_1 和 CC_1 的中点. 求证： $C_1F \parallel$ 平面 DEG ;

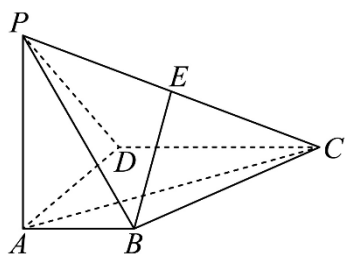


【例 2】(2024·江苏南京·模拟预测) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = AC = 3$ ， $PA = BC = 4$ ， M, N 分别为线段 AD, PC 上一点， $AM = 2MD$.

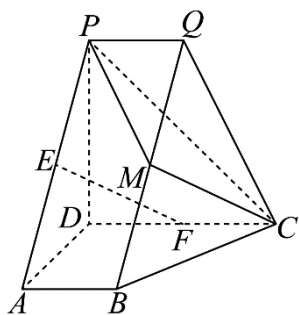


若 N 为 PC 的中点，证明： $MN \parallel$ 平面 PAB ;

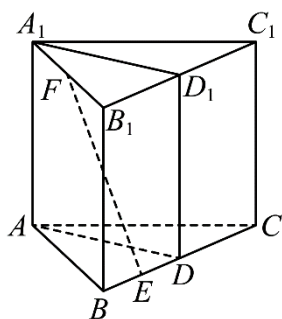
【巩固练习 1】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 E 为棱 PC 的中点， $AD = DC = AP = 2AB = 2$. 证明： $BE \parallel$ 平面 PAD ;



【巩固练习 2】(24-25 高三上·青海西宁·期中) 如图， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PQ \parallel CD$ ， $AD = CD = DP = 2PQ = 2AB = 2$ ，点 E, F, M 分别为 AP, CD, BQ 的中点. 求证 $EF \parallel$ 平面 CPM



【巩固练习 3】如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D, D_1, F 分别是 BC, B_1C_1, A_1B_1 的中点， $\overline{BC} = 4\overline{BE}$ ， $\angle ABC$ 的边长为 2. 求证： $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ；

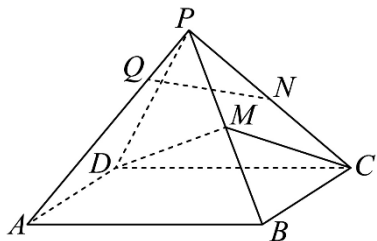


【题型 3】由中位线得出平行关系

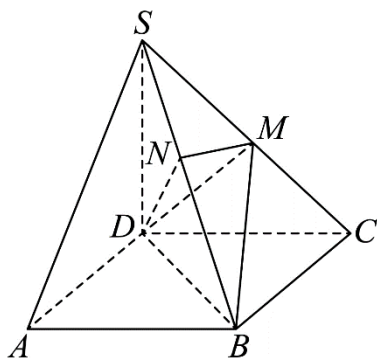
基础知识

涉及中点条件时考虑利用三角形中位线找线线平行.

【例 1】如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形， M, N 分别是棱 PB, PC 的中点， Q 是棱 PA 上一点，且 $AQ = 3QP$ ，求证： $NQ \parallel$ 平面 MCD

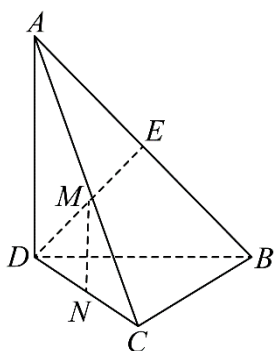


【巩固练习 1】(24-25 高三上·广东深圳·阶段练习) 如图所示，四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，平面 $SCD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle SDC = 90^\circ$ ，点 M 是线段 SC 的中点，点 N 在线段 SB 上，且 $MN \perp SB$.



求证： $SA \parallel$ 平面 MBD

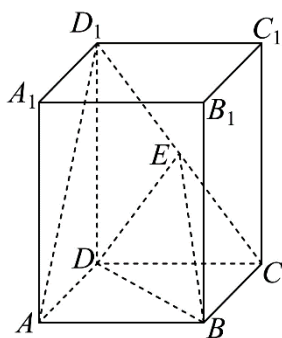
【巩固练习 2】（2024·浙江金华·一模）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD \perp$ 平面 BCD ，
 $AD = DB = DC = BC$ ， E 为 AB 中点， M 为 DE 中点， N 为 DC 中点.



求证： $MN \parallel$ 平面 ABC ；

【巩固练习 3】已知在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD=3$ ， $AA_1=4$ ， 点 E 是 CD_1 的中点， 求证：

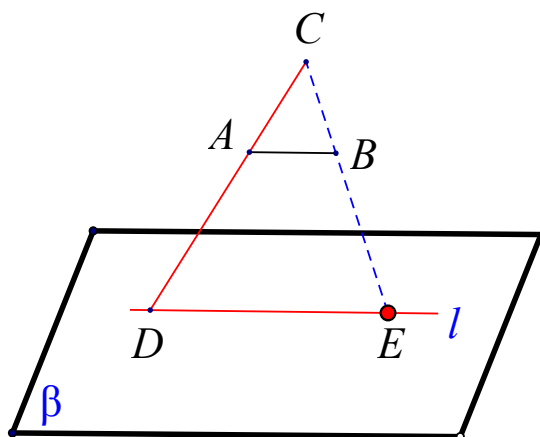
$AD_1 \parallel$ 平面 EBD



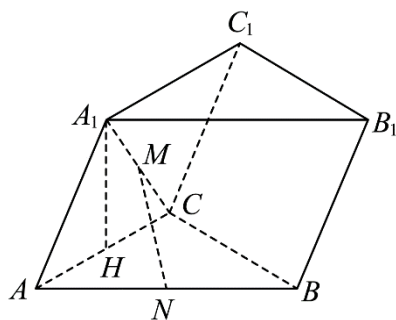
【题型 4】由线面平行得出线线平行（反推找线）

基础知识

解析：模型铺垫： $AB \parallel \text{平面 } \beta \Rightarrow AB \parallel DE$

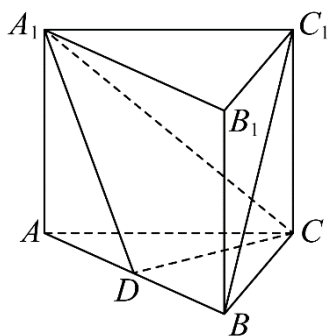


【例 1】如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为菱形，侧面 CBB_1C_1 为正方形. 点 M 为 A_1C 的中点，点 N 为 AB 的中点.

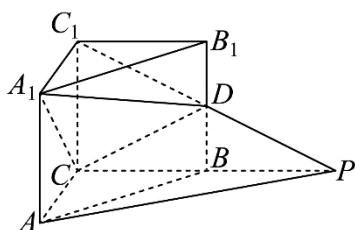


证明： $MN \parallel \text{平面 } BCC_1B_1$

【例 2】如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，点 I 在棱 PA 上（不与端点重合）， E ， F 分别是 PD ， AC 的中点.



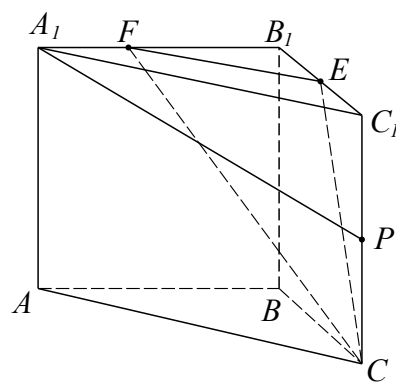
【巩固练习 3】(24-25 高三上·福建泉州·期中) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB = CC_1 = 3$, D 是棱 BB_1 的中点, P 是 C_1D 的延长线与 CB 的延长线的交点.



(1) 求证: $AP \parallel$ 平面 A_1CD ;

(2) 若点 E 在线段 AP 上, 且点 E 为靠近点 A 的三等分点, 求直线 A_1E 与平面 A_1CD 所成的角的正弦值.

【巩固练习 4】如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E, P 分别是 B_1C_1 和 CC_1 的中点, 点 F 在棱 A_1B_1 上, 且 $B_1F = 2A_1F$, 证明: $A_1P \parallel$ 平面 EFC .

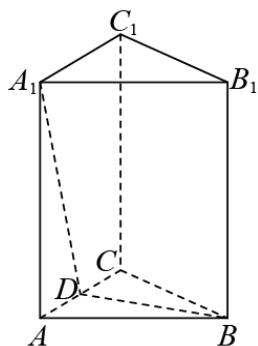


【题型 5】由面面平行得出线面平行

本法原理：已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，则平面 β 里的任意直线均与平面 α 平行

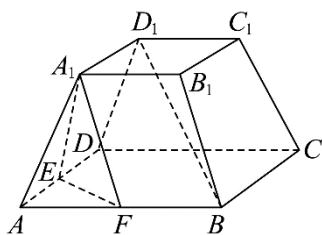
思路比较简单不过书写步骤会繁琐一些，一般不做第一选择

【例 1】如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱， $AA_1 = AB = 2AC$ ， $AB \perp AC$ ， D 为 AC 的中点.



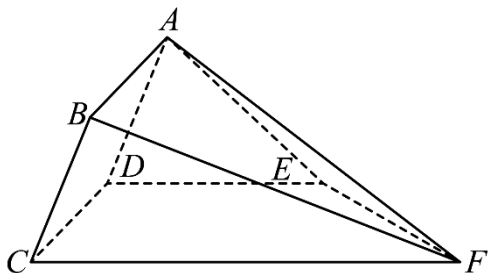
证明： $B_1C \parallel$ 平面 BA_1D

【例 2】（2024·贵州贵阳·二模）由正棱锥截得的棱台称为正棱台.如图，正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AD, AB 的中点， $AB = 2A_1B_1 = 4$ ，侧面 BB_1C_1C 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° .



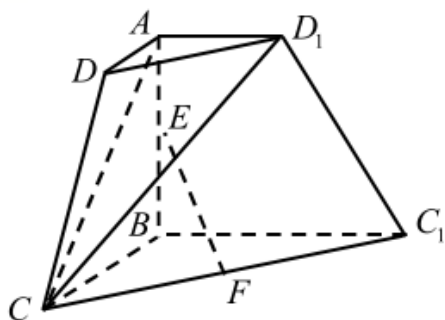
求证： $BD_1 \parallel$ 平面 A_1EF ；

【巩固练习 1】（2024·广东深圳·高三深圳外国语学校校考开学考试）如图，多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，二面角 $A-CD-F$ 的大小为 45° ， $DE \parallel CF$ ， $CD \perp DE$ ， $AD = 2$ ， $DC = 3$.



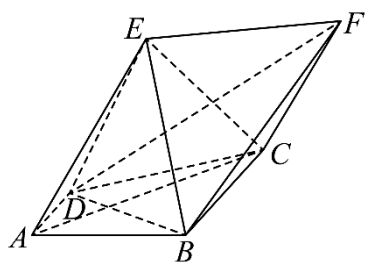
(1) 求证： $BF \parallel$ 平面 ADE ；

【巩固练习 2】(2024·四川达州·二模)如图,在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2AD$, 把梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转至 ABC_1D_1 , E , F 分别为 AB , CC_1 中点.



证明: $EF \parallel$ 平面 CD_1A ;

【巩固练习 3】(2024·江苏南京·二模)如图, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, 点 E 、 F 在平面 $ABCD$ 的同侧, $CF \parallel AE$, $AD = 1$, $AB = BC = 2$, 平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, $EA = EC = \sqrt{3}$. 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;



【题型 6】两个平面交线相关的平行证明

基础知识

两个平面交线相关的平行证明可以考虑补全图形得到交线,也可以先找一个线面平行,得出线线平行来代换交线,原理是由线面平行得出线线平行

【例 1】如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形,且 $PD \perp$ 面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l . 证明: $l \parallel CB$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/665320342000012102>