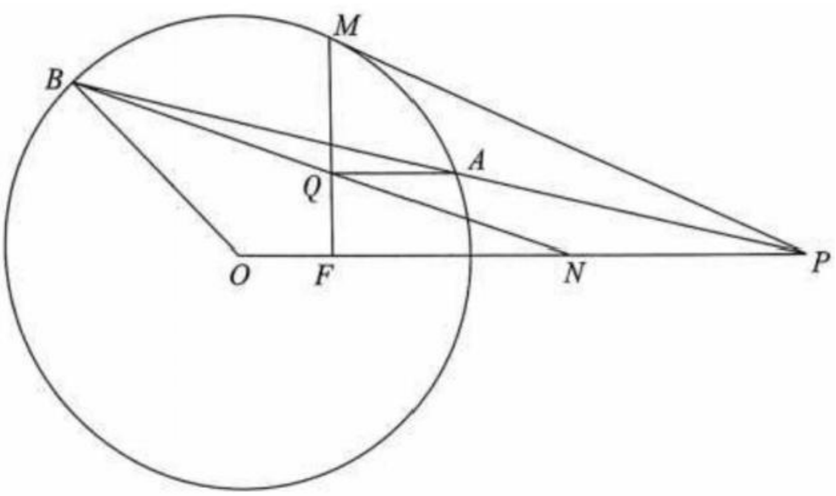
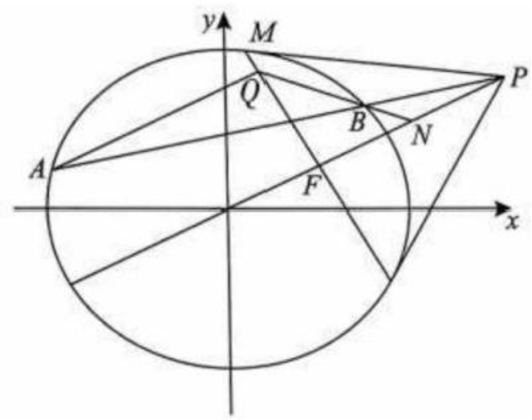
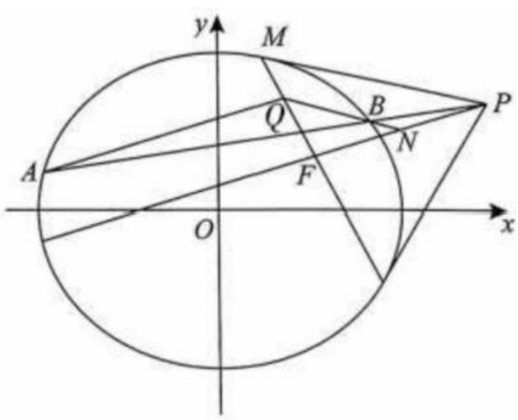
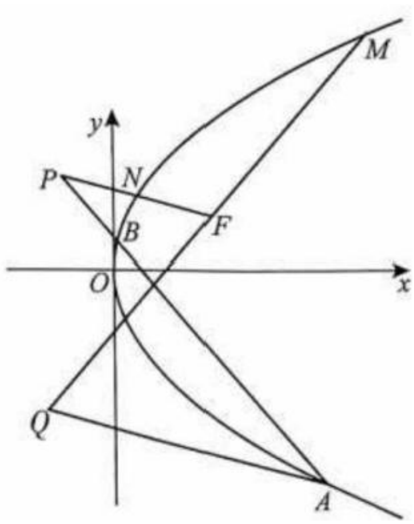
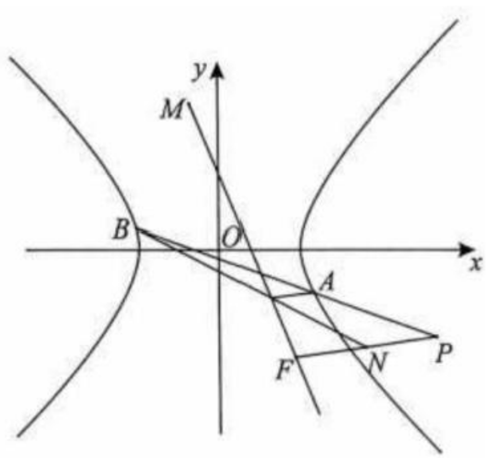


试题证明的几何性质是圆的性质的推广，即把椭圆看成是圆压缩的结果，压缩直线必须是圆心与点P　的连线.椭圆的任意一对极点和极线，试题证明的性质仍然成立(如图所示).其中直线MF　是 点P 关于椭圆的极线，F 是极线上一点，N 是 PF 的中点.对于双曲线和抛物线也有类似的性质.








y
M
B
O
A
x
F
N
P

试题注重基础性和综合性考查，紧密结合圆锥曲线的几何性质设问，有利于高校人才选拔和对高中数学教学的积极引导.

【试题出处】2024年高考理科数学(全国甲卷)第21题

【试题】

已知函数$f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)若$a=-2$，求 $f(x)$ 的极值；

(2)当$x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求a 的取值范围.

【参考答案】

(1)当$x=0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，极小值为$f(0)=0$.

(2)a 的取值范围;是$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

【考查目标】试题使用对数函数、多项式函数构造了所要研究的函数.通过对函数性质的探究，试题全面考查了导数及其应用，这是中学教学中的重点与难点.试题的第(1)问面向全体考生，体现了基础性的考查要求，利用导数就能得到函数的单调性，从而求得极值.试题的第(2)问体现了试题的选拔性，通过构造一个新函数，利用求导得到函数的单调性，进而得到参数的取值范围.试题考查了化归与转化能力、分类讨论能力、逻辑推理能力、数学运算能力，具有较好的选拔功能.

【试题分析】

解题思路

(1)先求出f(x) 的导函数，利用导函数分析极值点.当 a=-2 时，f(x)=(1+2x)In(1+x)-x,f(x) 的定义域为(-1,+00).求导得

$$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{1+2x}{1+x}-1=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}.$$

当-1<x<0 时 ，In(1+x)<0, $\frac{x}{1+x}<0$ 故f’(x)<0；类似可知，当x>0 时 ，f'(x)>0. 故f(x) 在区间(-1, 0)单调递减，在区间(0, +0)单调递增，因而当x=0 时 ，f(x) 取得极小值，极小值为f(0)=0.

(2)由于f(0)=0, 题目要求当x>0 时 ，f(x)≥0. 我们首先观察f(x)中各项的符号.当x>0 时 ，In(1+x)>0,-x<0. 若 a>0, 则 当 $x>\frac{1}{a}$时，1-ax<0, 这 样

f(x)=(1-ax)In(1+x)-x<0,

不符合要求.若a=0, 则 f(x)=In(1+x)-x, 在 x 较大时，有In(1+x)<x (事实上，对所有x>0, 该不等式都成立).例如，取x=1, 有 In 2<1,因而f(1)<0, 不符合要求. 以下考虑a<0.

当x⩾0 时 ，f(x)⩾0 等价于 $\ln(1+x)-\frac{x}{1-ax}\geqslant 0$

设$F(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1-ax}$，则 $F'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1-ax)^2}=\frac{x(a^2x-2a-1)}{(1+x)(1-ax)^2}$.

①若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$, 则当x>0 时 ，F'(x)>0, 故 F(x) 在区间(0, +0)单调递增，而F(0)=0, 所 以 当x≥0 时 ，F(x)≥0, 故f(x)≥0.

②若$-\frac{1}{2}<a<0$，可得F(x) 在区间$\left(0,\frac{2a+1}{a^2}\right)$单调递减，而F(0)=0, 所以当 $0<x<\frac{2a+1}{a^2}$时 ，F(x)<0,f(x)<0.

综上，a 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

【试题亮点】试题将对数函数与一次函数结合起来，构成所研究的函数，通过对函数单调性、最值的研究，从多角度考查导数的基本知

识以及利用导数研究函数性质的方法.试题设计的函数形式简单，但对利用导数研究函数性质的通性通法考查得较为全面，既考查了分类讨论的思想、化归与转化的思想，又考查了考生寻找合适的辅助函数以解决有关问题的能力

试题分步设问，逐步推进，考查由浅入深，层次分明，重点突出，内容丰富，很好地达到了考查目的，使理性思维深度、知识掌握的牢固程度、运算求解的娴熟程度不同的考生都有发挥空间.

【试题出处】2024年高考理科数学(全国甲卷)第22题

2024年高考文科数学(全国甲卷)第22题

【试题】

在直角坐标系x0y 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C 的极坐标方程为p=pcos θ+1.

(1)写出C 的直角坐标方程;

(2)设直线l: $\begin{cases} x=t, \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数),若C 与1 相交于A,B 两点，且|AB|=2, 求a.

【参考答案】

(1)由已知得$p^2=p^2\cos^2\theta+2p\cos\theta+1$,由 $x=p\cos\theta$, $y=p\sin\theta$ 得$x^2+y^2=x^2+2x+1$,即 C的直角坐标方程为$y^2=2x+1$.

(2)由已知得l的直角坐标方程为$y=x+a$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$, 由$\begin{cases} y=x+a, \\ y^2=2x+1 \end{cases}$得$x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$, 故

$x_1+x_2=2(1-a)$,$x_1x_2=a^2-1$,$(x_1-x_2)^2=8-8a$, 于是$(y_1-y_2)^2=8-8a$.

由题设知 $\sqrt{2}\times(8-8a)=2$, 解得 $a=\frac{3}{4}$.

【考查目标】本题考查简单曲线的极坐标与直角坐标的转换关系，考查简单曲线的参数方程，考查考生的运算求解能力.

【试题分析】

解题思路

(1) 由极坐标与直角坐标的转换公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 可得 $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$, 化简得 $C: y^2=2x+1$.

(2) 思路1 把曲线和直线方程都转换为直角坐标方程，联立方程求得 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

思路2 利用直线的参数的几何意义.

把 $\begin{cases} x=t, \\ y=t+a \end{cases}$ 代入 $y^2=2x+1$ 得 $(t+a)^2=2t+1$, 即 $t^2+(2a-2)t+a^2-1=0$.

$|AB|=\sqrt{2}|t_1-t_2|=4\sqrt{-a+1}=2$, 解得 $a=\frac{3}{4}$.

【试题亮点】试题考查极坐标和参数方程的基本知识、方法和技能. 试题难度不大，适应于广大考生的学习实际，试题与高中数学教学结合紧密，有利于加强教考衔接.

【试题出处】2024年高考理科数学(全国甲卷)第23题

2024年高考文科数学(全国甲卷)第23题

【试题】

已知实数a,b 满 足a+b≥3.

(1) 证明：$2a^2+2b^2>a+b$;

(2) 证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geq 6$.

【参考答案】

(1) $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2\geq(a+b)^2$. 由已知 $a+b\geq 3$，故 $(a+b)^2>a+b$. 因此 $2a^2+2b^2>a+b$.

(2) $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geq(2b^2-a)+(2a^2-b)$

$$
\begin{aligned}
&=(2a^2+2b^2)-(a+b)\\
&\geq(a+b)^2-(a+b)\\
&=(a+b)(a+b-1).
\end{aligned}
$$

由于 $a+b\geqslant 3$，可得 $(a+b)(a+b-1)\geqslant 6$，故 $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

【考查目标】试题考查基本不等式和绝对值的性质，考查考生对不等式放缩技巧的掌握，考查了考生的逻辑推理能力、数学运算能力以及化归和转化的思维方法. 试题的第(1)问较为简单，是面向多数考生设置的，第(2)问在第(1)问的基础上进一步提高，体现了一定的选拔作用.

【试题分析】

解题思路

(1) 思路1 由基本不等式，$a^2+b^2\geq 2ab$，故

$$2a^2+2b^2\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

由已知 $a+b\geq 3$，可知 $(a+b)^2>a+b$. 因此 $2a^2+2b^2>a+b$.

思路2 由基本不等式 $a^2+1\geq 2a$，同理 $b^2+1\geq 2b$. 再结合条件得

$$2a^2+2b^2\geq(2a-1)+(2b-1)=2(a+b)-2>a+b.$$

思路3 设 a+b=t, 固 定t≥3, 左边转化为关于a 的一元二次函数，求出最小值后再与右边比较. 由于 $2a^2+2b^2=2a^2+2(t-a)^2=4\left(a-\frac{t}{2}\right)^2+$

$t^2 \geqslant t^2$，而 $t \geqslant 3, t^2 > t$，故 $2a^2+2b^2 > t=a+b$.

(2)首先考虑如何放缩含有绝对值的式子$|a-2b^2|$和 $|b-2a^2|$，受到第(1)问结论的启发，直接去掉绝对值，我们有$|a-2b^2| \geq 2b^2-a$，$|b-2a^2| \geqslant 2a^2-b$. 这样第(2)问转化为证明$2a^2+2b^2-(a+b) \geqslant 6$. 这个不等式类似于第(1)问的不等式，但是需要证明的结论更强.

思路1 由基本不等式$a^2+b^2 \geq 2ab$ 可得 $2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2$. 又 $a+b \geq 3$，故

$$2a^2+2b^2-(a+b) \geq (a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1) \geq 6.$$

思路2 由于等号在 $a=b=\frac{3}{2}$时成立，我们采用以下基本不等式，

$$a^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 3a \quad b^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 3b$$

事

从而

$$2a^2+2b^2 \geqslant 2\left(3a-\frac{9}{4}\right)+2\left(3b-\frac{9}{4}\right)=6(a+b)-9.$$

又 $a+b \geqslant 3$，故 $6(a+b)-9 \geq a+b+6$，从而结论成立.

【试题亮点】本题考查二次方与一次方之间的比较以及对绝对值的放缩技巧，试题的第(1)问解法多样，适合考生发挥，只要思路合理，推理正确都能找到解决办法.第(2)问在第(1)问的基础上，自然地引导考生找到正确放缩绝对值的路径，回顾第(1)问的解法，更精细地进行估计，便得到第(2)问的答案.两问的设计非常合理，第(1)问既给了考生部分得分的机会，也对第(2)问提供了适当的提示.

两个选考题的难度都控制在中等程度，有利于考生水平的发挥，也有利于高中选修内容的教学.

全国甲卷（文科）

【试题出处】2024年高考文科数学（全国甲卷）第1题

【试题】

若$z=\sqrt{2}i$, 则$zz=$

A.-2　　　　B.$-\sqrt{2}$　　　　C.$\sqrt{2}$　　　　D.2

【参考答案】D

【考查目标】试题考查复数的概念、复数的基本运算. 试题较为基础，注重对基本概念、基本思想方法的考查，有利于考生克服紧张情绪，在考试中正常发挥.

【试题分析】

解题思路

思路1 $zz=|z|^2=2$,故选D.

思路2 因$z=-\sqrt{2}i$,所以$zz=\sqrt{2}i\times(-\sqrt{2}i)=2$.

【试题亮点】试题以复数的基本运算作为考查点，考查内容回归教材，面向全体考生，只要考生掌握了复数的基本概念和基本运算，就可以正确作答.