第十章平稳随机信号

拟定性信号：

信号随时间变化具有规律性，能够精确预测，能够用某一明确的数学关系描述；

随机信号：

信号随时间变化不具有明确的规律性，不能精确预测，不能用明确的数学关系来描述。现实中的信号绝大部分是随机信号；

研究措施：统计的措施，“估计”的措施。

随机信号:

人体生理信号（ECG, EEG, PCG, …);

语音信号;

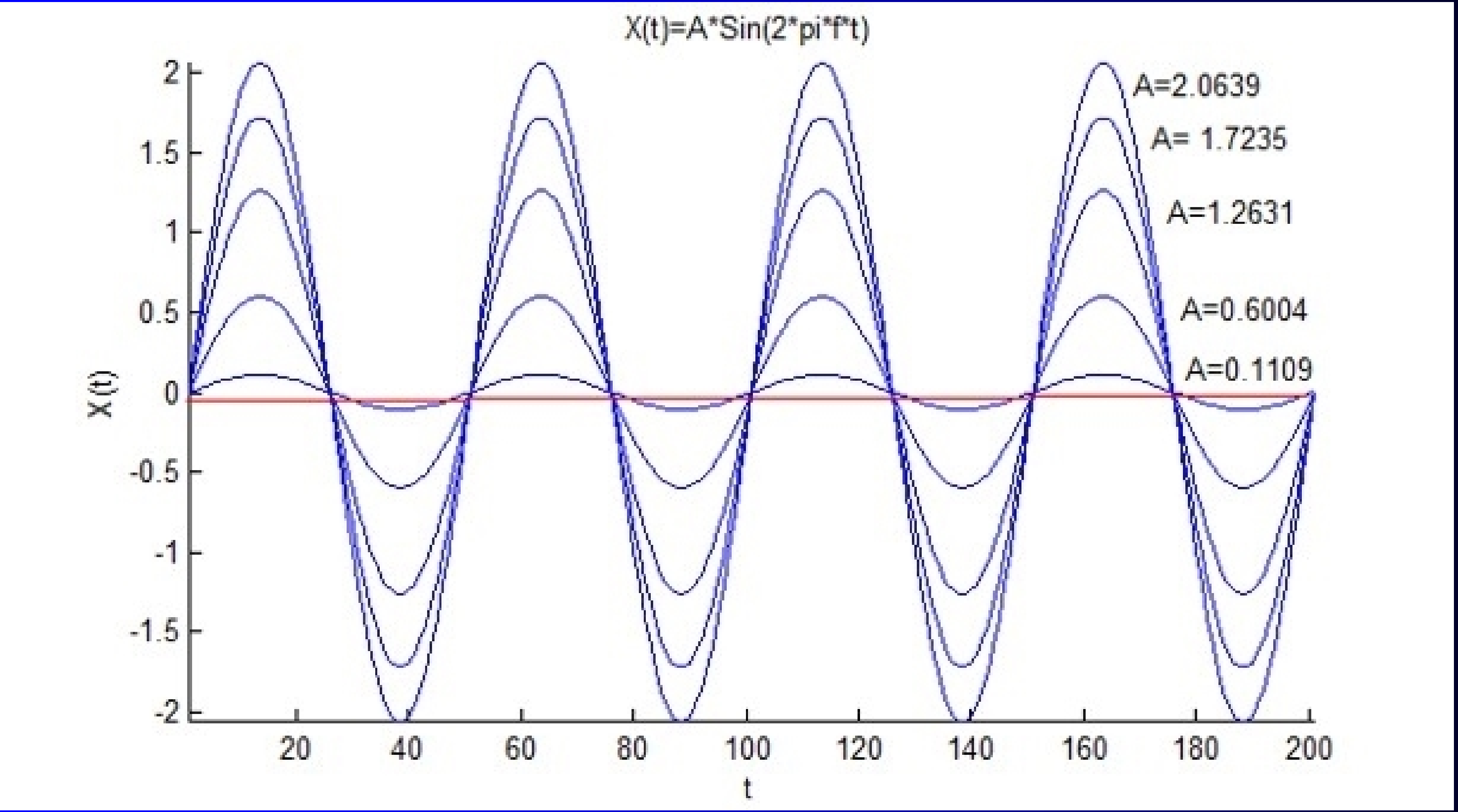
噪声信号;

多种经济指标（作物产量，GDP, 股票指数，
价格指数，…）;

多种自然现象:

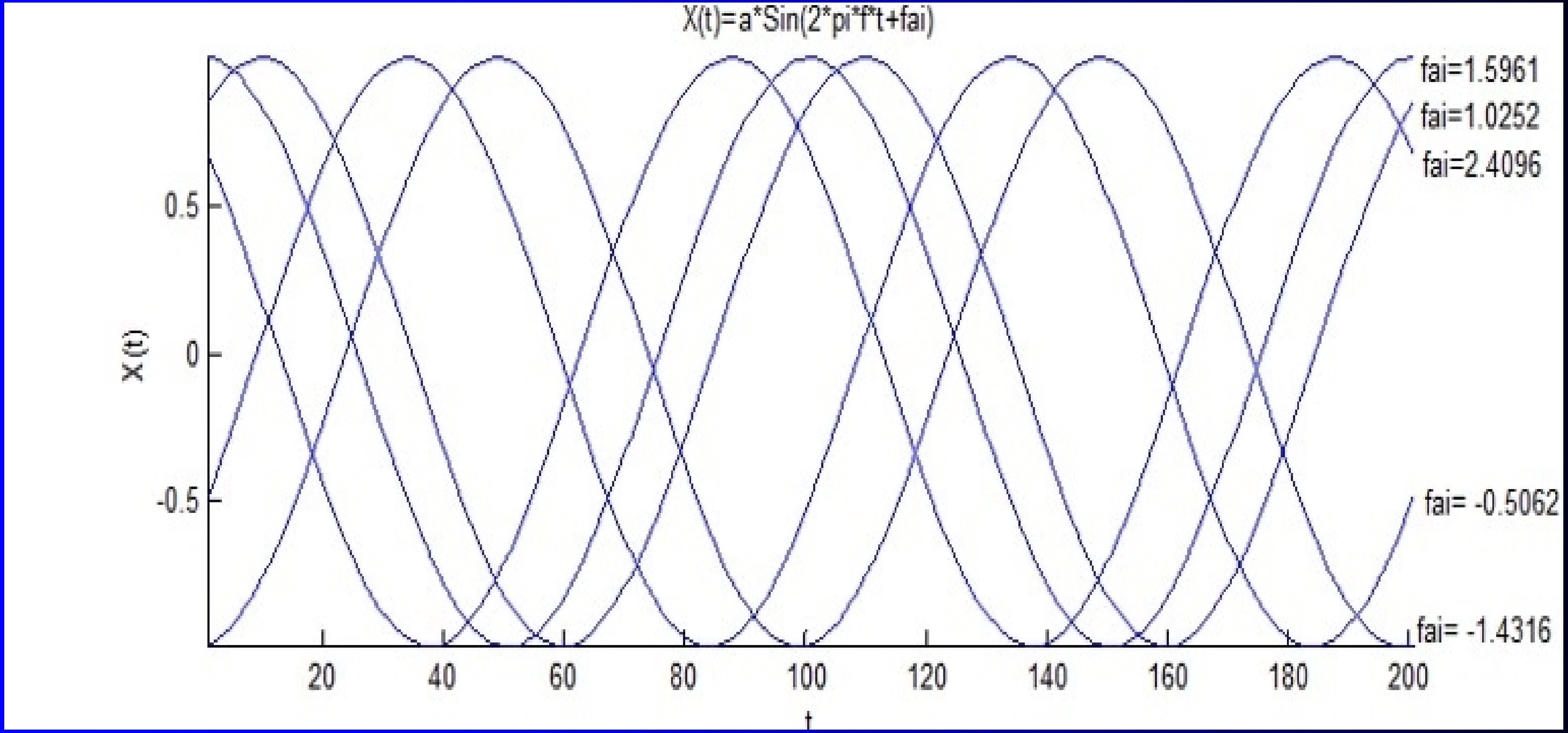
（河水流量，平均温度，单位面积承受到的风载
太阳黑子数，…）等等

$$X(t) = A\sin(2\pi f\ t), \quad A : N(0, \sigma^2)$$



$$X(t) = a\sin(2\pi ft + \Phi), \quad \Phi : (-\pi, \pi)$$

均匀分布



随机信号示意图：

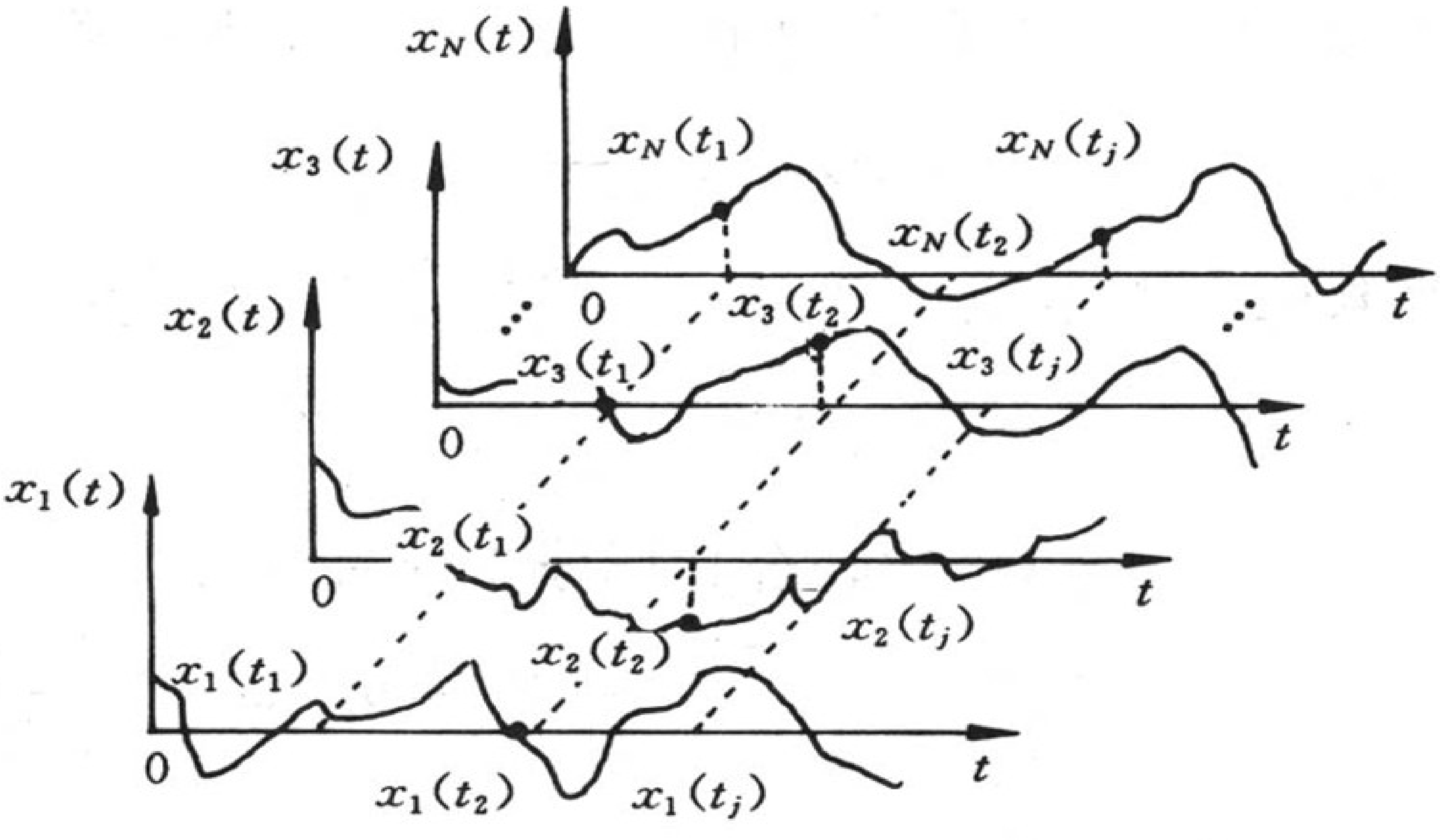


图 10.1.1　晶体管直流放大器的温漂电压

由以上例子能够看出：因为随机信号里某一种参数是随机的（即是随机变量），所以，相应随机变量的每一种取值（或称为每一次观察，或每一次试验），我们都能够得到一种信号（样本）；无穷次观察，可得到无穷个信号。每一种信号，都是该随机信号的一次实现，即

$$X(t)=\{x_1(t),\cdots,x_j(t)\},\qquad t\to\infty,\ j\to\infty$$

$$X(n)=\{x(n,1),\cdots,x(n,j)\},\qquad n\to\infty,\ j\to\infty$$

样本无穷多，每一种样本的时间无限长！

所以，随机信号是功率信号！

10.1 随机信号及其特征描述

一、随机变量X

X 取值是离散的

离散型随机变量
(二项式分布，泊松分布）

X 取值是连续的

连续型随机变量
（均匀分布，高斯分布）

Note:随机变量与时间变量无关

随机变量的描述：

1．分布函数和概率密度：

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx,\quad p(x)=dP(x)/dx$$

$$0\le P(x)\le 1$$

$$P(-\infty)=0$$

$$P(\infty)=1$$

$$if\ \ x<y$$

$$then\quad P(x)<P(y)$$

$$p(x)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,\mathrm{d}\,x=1$$

$$P(b)-P(a)$$

$$=\int_{a}^{b}p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

2. 数字特征：

求均值运算

（1）均值：

$$\mu = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

（2）方差：

$$\sigma^2 = E\left\{|X-\mu|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 p(x) dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i-\mu|^2$$

（3） 均方差：

$$D^2 = E\left\{|X|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 \, p(x) dx$$

3． 矩（Moment）

$$\eta_X^m = E\left\{|X|^m\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m \, p(x) \, \mathrm{d}\, x$$

$\Longrightarrow$ m 阶原点矩

$$\eta_X^0 = 1, \ \eta_X^1 = \mu_X, \ \eta_X^2 = D_X^2$$

$$\gamma_X^m = E\left\{|X-\mu_X|^m\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu_X|^m \, p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$ $\boxed{m\ \text{阶中心矩}}$

$$\gamma_X^0 = 1,\ \gamma_X^1 = 0,\ \gamma_X^2 = \sigma_X^2$$

原则差： $\sigma_X = \sqrt{\gamma_X^2}$

$m=1$： 一阶统计量（均值）；

$m=2$： 二阶统计量（方差，均方，有关，功率谱）；

$m > 2$： 高阶统计量：

$$\text{Skew} = E\left\{\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right]^3\right\} = \frac{1}{\sigma_X^3}\gamma_X^3$$

斜度（skewness），无量纲，用来评价分布函数相对均值的对称性。

$$\text{Kurtosis} = E\left\{\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right]^4\right\} - 3 = \frac{1}{\sigma_X^4}\gamma_X^4 - 3$$

峰度，无量纲，表征分布函数在均值处的峰值特征。减3是为了确保正态分布的峰度为零。

两个随机变量：协方差函数

$$\operatorname{cov}\left[X,Y\right]=E\left\{(X-\mu_X)^*(Y-\mu_Y)\right\}$$

$$=E\left\{X^*Y\right\}-E\left\{X\right\}^*E\left\{Y\right\}$$

若 $p(x,y)=p(x)p(y)$，则 X,Y 相互独立;

若 $\operatorname{cov}\left[X,Y\right]=0$，则 X,Y 不相关;

独立 $\Rightarrow$ 不相关，反之不一定成立;

对高斯随机变量二者一致

常用随机变量:

1.均匀分布:

例1 若 X 是在 $[a,b]$ 上服从均匀分布的实随机变量, 则

$$p(x)=\frac{1}{b-a} \qquad \mu_X=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

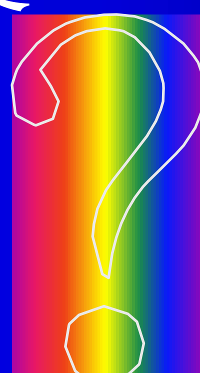
若 X 是离散型随机变量，且取

$$0,1,\ldots,n$$

的概率都相等，则 X 为离散均匀分布的随机变量。

概率密度

$$p(x)=\frac{1}{n+1}$$



均值

$$\mu_X = n/2$$

方差

$$\sigma_X^2=\frac{n(n+2)}{12}$$

2.高斯分布：　　　　$N(\mu_X,\sigma_X^2)$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

高斯分布的 pdf 由其均值和方差所决定，实际上，其高阶统计量也由均值和方差所决定。

$$\gamma_X^m=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)\sigma_X^m & m:\mathrm{even}\\ 0 & m:\mathrm{odd}\end{cases}$$

$\gamma_X^4=3\sigma_X^4$ $\Longrightarrow$ 高斯分布的峰度为零

二、随机向量

$$X=\underbrace{\left[x_1,\cdots,x_N\right]^T}_{\text{随机向量}},\ \mu=\underbrace{\left[\mu_{x_1},\cdots,\mu_{x_N}\right]^T}_{\text{均值向量}}$$

X 的每一种元素 $x_1,\cdots,x_N$ 都是随机变量，

均值： $\mu_{x_i}=E\left\{x_i\right\},i=1,2,\cdots,N$

方差： $\sum=E\left\{[X-\mu][X-\mu]^T\right\}$ $\boxed{\text{矩阵}}$

$$\sum = E\left\{[X-\mu][X-\mu]^T\right\}$$

协方差矩阵

$$=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}[x_1,x_2] & \cdots & \operatorname{cov}[x_1,x_N] \\ \operatorname{cov}[x_2,x_1] & \sigma_2^2 & \cdots & \operatorname{cov}[x_2,x_N] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{cov}[x_N,x_1] & \operatorname{cov}[x_N,x_2] & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

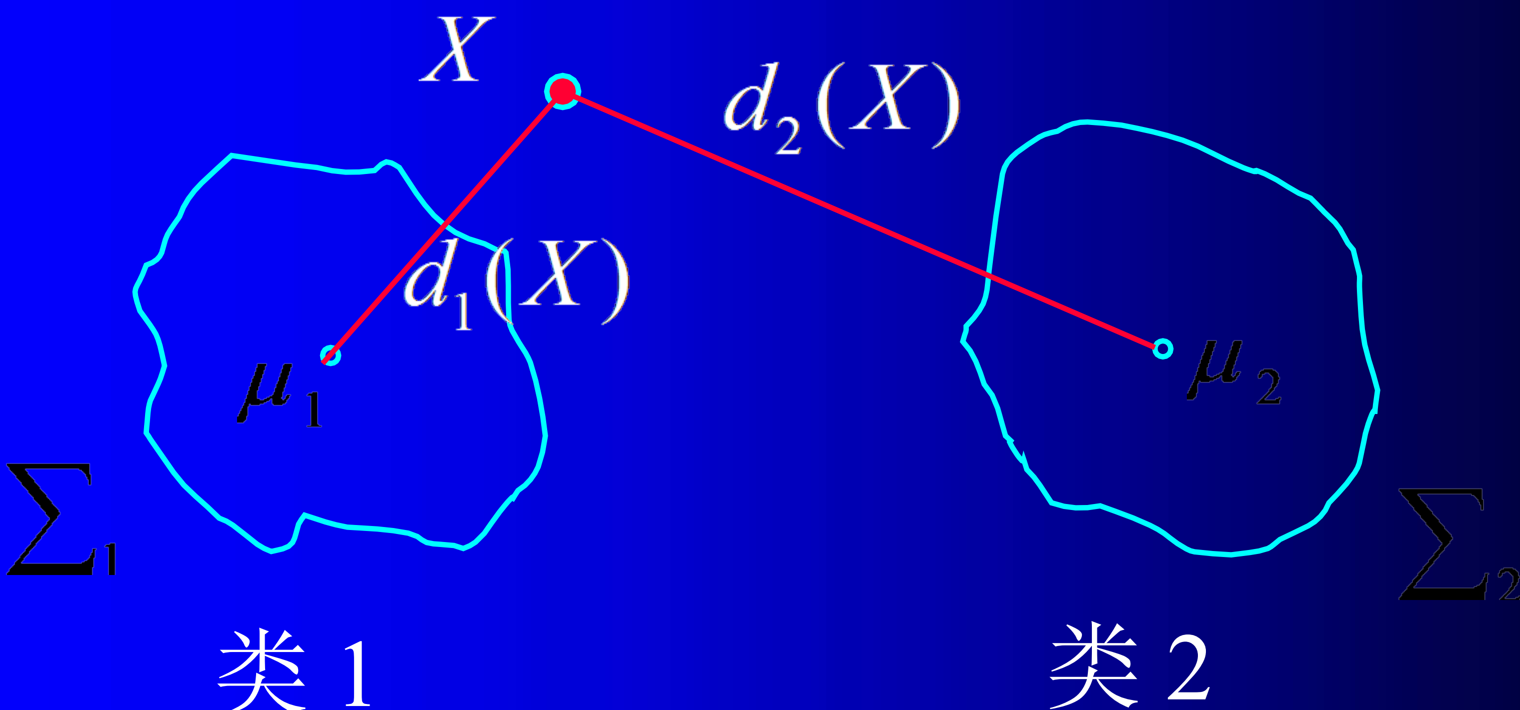
例2 N 维高斯分布：

$$p(X)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N|\Sigma|}}\exp\left[-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right]$$

应用：线性鉴别函数：

两大类随机向量，可求出各自（即类内）的：
$$\begin{cases} \mu_1,\ \mu_2 \\ \Sigma_1, \Sigma_2 \end{cases}$$

对新的随机向量 X，判断它属于那一类：



“距离”怎样计算

$$d_i(X) = -\frac{1}{2}(X-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i)$$

Mahalanobis 距离

或者 $$d_i(X) = -\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1}(X-\mu)$$

式中 $$\Sigma = \frac{\Sigma_1+\Sigma_2}{2}, \quad \mu = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$$

上式又称为模式辨认中的线性鉴别函数。将上述应用推广，可实现多类鉴别。

三、随机信号

$$X(t)=\{x_1(t),\cdots,x_N(t),$$

$$t\to\infty,N\to\infty\}$$

$$X(n)=\{x(n,1),\cdots,x(n,N),$$

$$n\to\infty,N\to\infty\}$$

随机信号的特点：

1. 是时间 $(t,\text{ or }n)$ 的函数；

2. 样本无穷多，连续时间无穷长，

所以，随机信号是功率信号；

3. 对任一时刻t_j

$$x_i(t_j),\quad i=1,2,\cdots,\infty$$

的集合构成一种随机变量。伴随 t_j 的变化，我们会得到无穷多种随机变量。

所以：

随机信号是依赖于时间$t(\text{or } n)$的随机变量。

所以：可用随机变量的措施来描述随机信号。

随机信号的描述：

高维概率密度：

$$P_x(x_1,\cdots,x_m;t_1,\cdots,t_m)$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_m)\le x_m\}$$
$$m\to\infty$$

这一种描述措施理论上最佳，但是不实际的。找到高维的概率密度，或高维的分布函数是异常困难的。找到了，求解也非常困难。

数字特征—最常用的措施：

1. 均值：

$$\mu_x(n) = E\{X(n)\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x(n,i)$$

2. 方差：

$$\sigma_x^2(n) = E\{|X(n) - \mu_x(n)|^2\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x(n,i) - \mu_x(n)|^2$$

时间的函数

3.均方 $D_X^2(n)=E\{|X(n)|^2\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x(n,i)|^2$

4.自有关函数

$$r_x(n_1,n_2)=E\left\{X^*(n_1)X(n_2)\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x^*(n_1,i)x(n_2,i)$$

5. 自协方差函数

$$\mathrm{cov}_x(n_1,n_2)=E\left\{[X(n_1)-\mu_x(n_1)]^*[X(n_2)-\mu_x(n_2)]\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x(n_1,i)-\mu_x(n_1)]^*[x(n_2,i)-\mu_x(n_2)]$$

自有关函数描述了随机信号 $X(n)$ 在 n_1 和 n_2 时刻的关系，是描述随机信号最主要的统计量。

假如： $n_1 = n_2 = n$

则
$$\begin{cases} r_x(n_1, n_2) = E\left\{|X(n)|^2\right\} = D_X^2(n) \\ \mathrm{cov}_x(n_1, n_2) = E\left\{|X(n) - \mu_x(n)|^2\right\} = \sigma_X^2(n) \end{cases}$$

6. 相互关函数

$$r_{xy}(n_1, n_2) = E\left\{X^*(n_1)Y(n_2)\right\}$$

7. 互协方差函数

$$\mathrm{cov}_{xy}(n_1,n_2)=E\left\{\left[X(n_1)-\mu_x(n_1)\right]^*\left[Y(n_2)-\mu_y(n_2)\right]\right\}$$

假如： $\mathrm{cov}_{xy}(n_1,n_2)=0 \Rightarrow$ X, Y 不有关

两个信号不有关，有：

$$r_{xy}(n_1,n_2)=E\left\{X^*(n_1)Y(n_2)\right\}$$

$$=E\left\{X^*(n_1)\right\}E\left\{Y(n_2)\right\}=\mu^*{}_x(n_1)\mu_y(n_2)$$

两个信号相互独立，有

$$p(x,y)=p(x)p(y)$$

10.2　平稳随机信号

若 $X(n)$ 满足:

1. $\mu_x(n)=E\{X(n)\}=\mu_x$

2. $E\{|X(n)|^2\}<\infty$

3. $r_x(n_1,n_2)=E\{X^*(n)\ X(n+m)\}=r_x(m)$

则 $X(n)$ 为宽平稳（或广义）平稳信号

注意: 平稳信号的均值和时间无关，为常数；自有关函数和时间的起点无关，只和两点的时间差有关。

由此还可导出：

$$\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2$$

$$D_x^2(n) = D_x^2$$

方差和均方也与时间无关。

$$\operatorname{cov}_{xy}(m) = E\{[X(n) - \mu_x]^*[Y(n+m) - \mu_y]\}$$

互协方差函数也和时间的起点无关。

实际中的大部分信号都可看作是宽平稳的。处理以便。

几种概念：

1. 若 $$p_x(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) = p_x(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则 $X(n)$ 严（狭义）平稳，统计特征不随时间变化。

2. 若

$$p(x_1,x_2;n_1,n_2)=p(x_1,n_1)p(x_2,n_2)$$

则 $X(n_1),X(n_2)$ 相互独立

3. 若 $\mathrm{cov}_x(n_1,n_2)=0$

则 $X(n_1),X(n_2)$ 不有关