

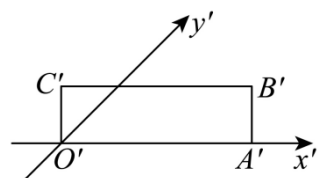
2024~2025 学年华二附中高二（上）10 月月考数学试卷

一、填空题（第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分，满分 54 分）

1. 直线与平面所成角的范围是_____.

2. 垂直于同一平面的两条直线的位置关系是_____.

3. 如图, 矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形由斜二测画法得到的直观图, 其中 $O'A' = 3$, $O'C' = 1$, 则原图形周长是_____.



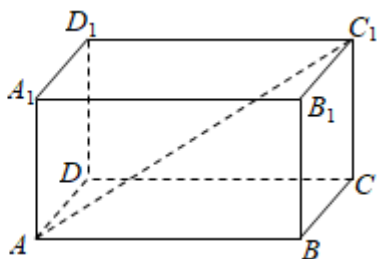
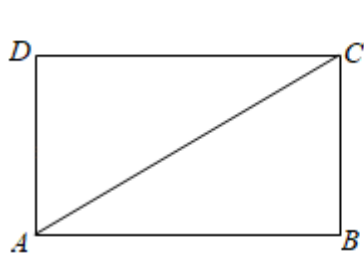
4. 设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 则异面直线 AB 和 B_1C 的距离为_____.

5. 已知 E, F, G, H 分别为空间四边形 $ABCD$ 的棱 AB, BC, CD, DA 的中点, 若对角线 $BD = 2$, $AC = 4$, 则 $EG^2 + HF^2$ 的值是_____.

6. 一个长方体全面积是 22cm^2 , 所有棱长的和是 24cm , 求长方体的对角线长是_____ cm .

7. 从正方体八个顶点的两两连线中任取两条直线 a, b , 且 a, b 是异面直线, 则 a, b 所成角的余弦值的所有可能取值构成的集合是_____.

8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 对角线 AC_1 与棱 AB, AD, AA_1 所成的角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 与平面 $ABCD$, 平面 ABB_1A_1 , 平面 ADD_1A_1 所成的角分别为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 则下列说法中正确的是_____.

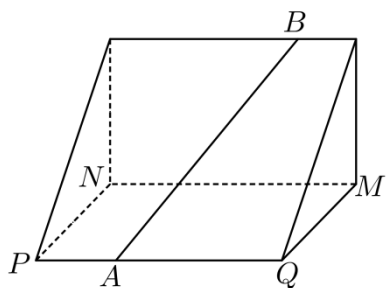


① $\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = 1$, ② $\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = 2$.

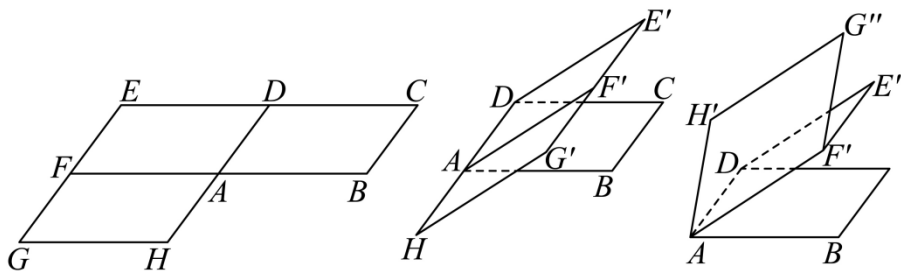
③ $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, ④ $\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_3 = 1$

9. 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离分别为 2, 3, 4, 则 $\triangle ABC$ 的重心 G 到平面 α 的距离为_____.

10. 如图, 某人沿山坡 PQB 的直行道 AB 向上行走, 直行道 AB 与坡脚 (直) 线 PQ 成 60° 角, 山坡与地平面所成二面角 $B - PQ - M$ 的大小为 30° . 若此人沿直行道 AB 向上行走 200 米, 那么此时离地平面的高度为_____米.



11. 如下图, 已知四边形 $ABCD, ADEF, AFGH$ 均为正方形, 先将矩形 $EDHG$ 沿 AD 折起, 使二面角 $E'-AD-B$ 的大小为 30° , 再将正方形 $AF'G'H'$ 沿 AF' 折起, 使二面角 $H'-AF'-D$ 的大小为 30° , 则平面 $AF'G'H'$ 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的余弦值为_____.



12. 若空间内一点到二面角的两个半平面的距离分别为 a 和 $\sqrt{2}a$, 到棱的距离为 $2a$, 则此二面角的大小是_____.

二、单选题 (本大题共 4 题, 满分 20 分)

13. 已知下列命题: (1) 三点确定一个平面, (2) 一条直线和一个点确定一个平面, (3) 两条直线确定一个平面, 其中不正确的命题个数有 ().

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

14. 以下命题中真命题的是 ()

A. 各侧面都是矩形的棱柱是长方体
B. 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
C. 体对角线都相等的平行六面体是长方体
D. 各侧面都是全等的矩形的直棱柱是正棱柱

15. 两二面角的两个半平面分别垂直, 则这两个二面角的大小关系是 ()

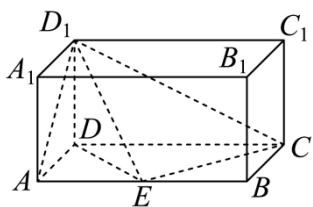
A. 一定相等 B. 一定互补
C. 一定相等或互补 D. 以上都不对

16. a, b 为异面直线, 且 a, b 所成角为 40° , 过空间一点 P 作直线 c , 直线 c 与 a, b 均异面, 且所成角均为 θ , 若这样的 c 共有四条, 则 θ 的范围为 ()

A. $70^\circ < \theta < 90^\circ$ B. $20^\circ < \theta < 70^\circ$
C. $0^\circ < \theta < 20^\circ$ D. $40^\circ < \theta < 90^\circ$

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分)

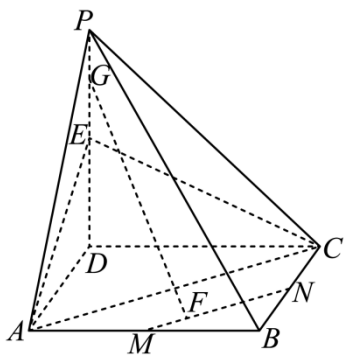
17. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 (如图), $AD=AA_1=1, AB=2$, 点 E 是棱 AB 的中点.



(1) 在《九章算术》中,将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑.试问四面体 D_1CDE 是否为鳖臑? 并说明理由.

(2) 求直线 DE 与直线 AD_1 所成角的大小.

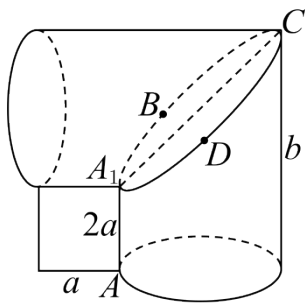
18. 如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形, E 为 PD 中点.



(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 ACE .

(2) 若 M, N 分别是线段 AB, BC 的中点, F 是直线 MN 上的动点,则线段 PD 上是否存在点 G , 使得 $FG \parallel$ 平面 ACE ? 若存在, 请求出 $\frac{PG}{GD}$ 的比值; 若不存在, 请说明理由.

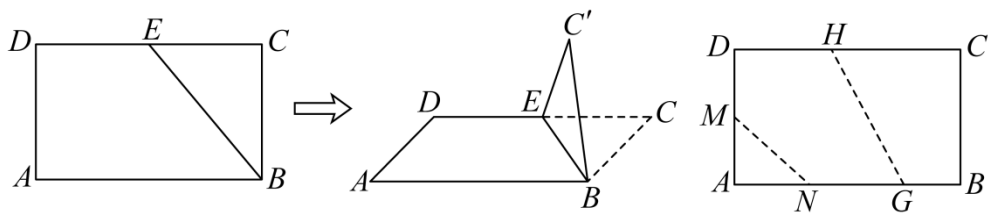
19. 某工厂承接制作各种弯管的业务, 其中一类弯管由两节圆管组成, 且两节圆管是形状、大小均相同的斜截圆柱, 其尺寸如图所示 (单位: cm), 其中斜截面与底面所成的角为 α , 若 $a = 5, b = 13, \alpha = 45^\circ$, 底面直径为 8.



(1) 求其中一节圆管的体积.

(2) 求这一类弯管的表面积.

20. 已知矩形 $ABCD$ 的长为 2, 宽为 1. (如图所示)



(1) 若 E 为 DC 的中点, 将矩形沿 BE 折起, 使得平面 $C'BE \perp$ 平面 $ABCD$, 分别求 C' 到 AB 和 AD 的距离.

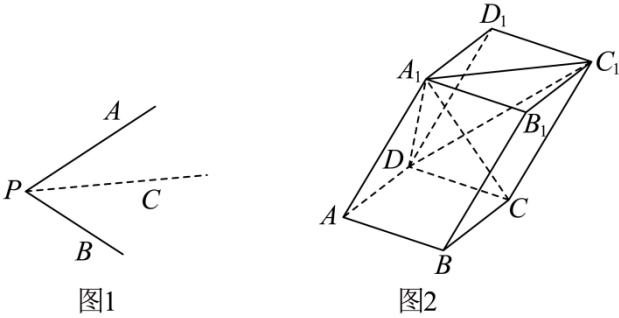
(2) 在矩形 $ABCD$ 中, 点 M 是 AD 的中点, 点 N 是 AB 的三等分点 (靠近 A 点). 沿折痕 MN 将 $\triangle AMN$ 翻折成 $\triangle A'MN$, 使平面 $A'MN \perp$ 平面 $ABCD$. 又点 G, H 分别在线段 NB, CD 上, 若沿折痕 GH 将四边形 $GHCB$

向上翻折,使 C 与 A' 重合,求线段 NG 的长.

21. 类比思想在数学中极为重要,例如类比于二维平面内的余弦定理,有三维空间中的三面角余弦定理,如图 1,由射线 PA, PB, PC 构成的三面角 $P-ABC$,记 $\angle APC = \alpha, \angle BPC = \beta, \angle APB = \gamma$,二面角 $A-PC-B$ 的大小为 θ ,则

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta.$$

如图 2,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ, A_1A = A_1C = 2\sqrt{3}, AB = 2$,且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB$.



- (1) 在图 2 中,用三面角余弦定理求 $\cos \angle A_1AB$ 的值.
- (2) 在图 2 中,直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 内任意一条直线的夹角为 φ ,证明: $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
- (3) 在图 2 中,过点 B 作平面 η ,使平面 $\eta //$ 平面 A_1C_1D ,且与直线 CC_1 相交于点 P ,求 $\frac{C_1P}{C_1C}$ 的值.

2024~2025 学年华二附中高二（上）10 月月考数学试卷

一、填空题（第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分，满分 54 分）

1. 直线与平面所成角的范围是_____.

【答案】 $[0, \frac{\pi}{2}]$

【分析】利用直线与平面所成角的定义，写出结果即可.

【详解】直线和平面所成的角，应分三种情况：

①直线与平面斜交时，直线和平面所成的角是指此直线和它在平面上的射影所成的锐角，其大小范围为 $(0, \frac{\pi}{2})$.

②直线和平面垂直时，直线和平面所成的角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

③直线和平面平行或在平面内时，直线和平面所成的角的大小为 0.

综上，直线和平面所成的角的范围为 $[0, \frac{\pi}{2}]$.

故答案为： $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. 垂直于同一平面的两条直线的位置关系是_____.

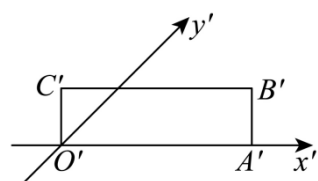
【答案】平行

【分析】根据题意，利用线面垂直的性质定理，即可求解.

【详解】根据线面垂直的性质定理，可得到垂直于同一个平面的两条直线平行.

故答案为：平行.

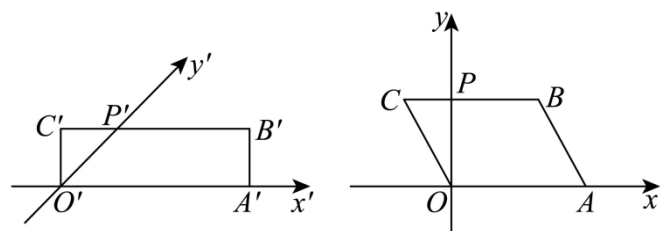
3. 如图，矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形由斜二测画法得到的直观图，其中 $O'A' = 3$ ， $O'C' = 1$ ，则原图形周长是_____.



【答案】12

【分析】由直观图还原为原图，分别求得边长从而得到周长.

【详解】如图所示.



在直观图中，设 $O'y'$ 与 $B'C'$ 交于点 P' ，则 $O'P' = \frac{O'C'}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$ ， $C'P' = O'C' = 1$ ， $P'B' = B'C' - C'P' = 2$.

在原图形中, $CP=1$, $OP=2O'P'=2\sqrt{2}$, $OC=\sqrt{OP^2+CP^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$, $OA=O'A'=3$.

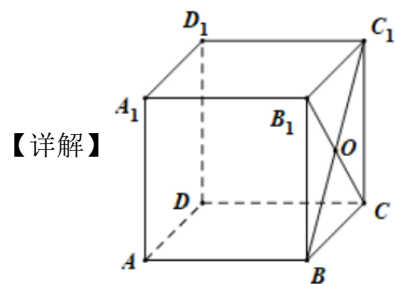
所以原图形的周长是 $2\times(OA+OC)=2\times(3+3)=12$.

故答案为: 12.

4. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 则异面直线 AB 和 B_1C 的距离为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

【分析】 连接 BC_1 , 进而可证得 BC_1 即为公垂线, 从而得解.



如图, 连接 BC_1 交 B_1C 于 O , 由正方体的性质可知.

$AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 又 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 .

$\therefore BC_1 \perp AB$, 又 $B_1C \perp BC_1$

$\therefore$ 异面直线 AB 和 B_1C 之间距离为 $BO = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

5. 已知 E, F, G, H 分别为空间四边形 $ABCD$ 的棱 AB, BC, CD, DA 的中点, 若对角线 $BD=2, AC=4$, 则 EG^2+HF^2 的值是_____.

【答案】 10

【分析】 根据中位线定理判断四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

再由 $\overrightarrow{EG}^2 + \overrightarrow{HF}^2 = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH})^2 + (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH})^2$ 计算可得解.

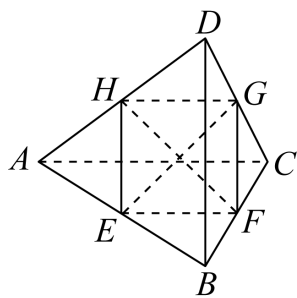
【详解】 如图所示, 由三角形中位线的性质可得 $EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC$, $HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

因为 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH}$.

所以 $\overrightarrow{EG}^2 + \overrightarrow{HF}^2 = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH})^2 + (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH})^2 = 2(\overrightarrow{EF}^2 + \overrightarrow{EH}^2) = 2(1+4) = 10$.

故答案为: 10



6. 一个长方体全面积是 22cm^2 , 所有棱长的和是 24cm , 求长方体的对角线长是_____ cm .

【答案】 $\sqrt{14}$

【分析】 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 结合 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$, 即可求解.

【详解】 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c .

$$\text{由题意得} \begin{cases} 2(ab + bc + ac) = 22 \\ 4(a + b + c) = 24 \end{cases}.$$

$$\text{可得} \begin{cases} ab + bc + ac = 11 \\ a + b + c = 6 \end{cases}.$$

$$\text{则 } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 36 - 22 = 14.$$

$$\text{所以长方体的对角线长为 } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{14} (\text{cm})$$

故答案为: $\sqrt{14}$.

7. 从正方体八个顶点的两两连线中任取两条直线 a, b , 且 a, b 是异面直线, 则 a, b 所成角的余弦值的所有可能取值构成的集合是_____.

【答案】 $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

【分析】 将所有直线分为正方体的棱, 面对角线, 体对角线三类, 然后讨论不同情况的时候的异面直线的夹角的余弦值即可.

【详解】 利用异面直线的夹角范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故其余弦值范围为 $[0, 1)$, 可以分为以下几类:

两条棱所在直线异面时, 所成角的度数是 $\frac{\pi}{2}$, 其余弦值为 0.

面对角线与棱所在直线异面时, 所成角的度数是 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$, 其余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 0.

两条面对角线异面时, 所成角的度数是 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$, 其余弦值为 $\frac{1}{2}$ 或 0.

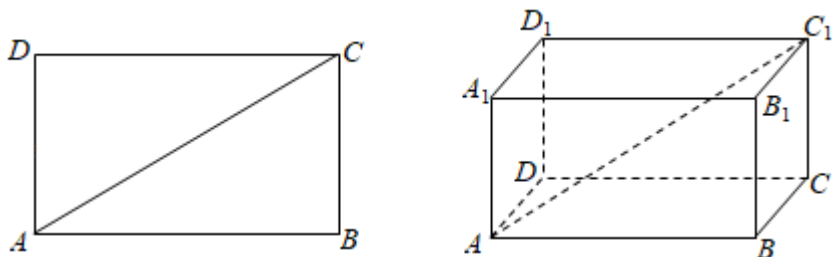
体对角线与棱所在直线异面时, 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

体对角线与面对角线异面时, 所成角的度数是 $\frac{\pi}{2}$, 其余弦值为 0.

所以从正方体八个顶点的两两连线中任取两条直线 a, b , 且 a, b 是异面直线, 则 a, b 所成角的余弦值的所有可能取值构

成的集合是 $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

8. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 对角线 AC_1 与棱 AB, AD, AA_1 所成的角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 与平面 $ABCD$, 平面 ABB_1A_1 , 平面 ADD_1A_1 所成的角分别为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 则下列说法中正确的是_____.



① $\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = 1$, ② $\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = 2$.

③ $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, ④ $\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_3 = 1$

【答案】②③④

【分析】分别求出角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的正弦值和余弦值, 求出 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的正弦值, 结合所给结论可得答案.

【详解】设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 则 $AC_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

连接 BC_1 , $BC_1 = \sqrt{b^2 + c^2}$, 由长方体性质可知, $AB \perp BC_1$, 所以 $\alpha_1 = \angle C_1AB$.

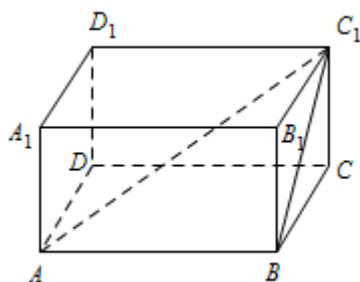
所以 $\sin \alpha_1 = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $\sin^2 \alpha_1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

同理可得 $\sin^2 \alpha_2 = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, $\sin^2 \alpha_3 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

所以 $\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = \frac{b^2 + c^2 + a^2 + c^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 2$.

$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 - \sin^2 \alpha_1 + 1 - \sin^2 \alpha_2 + 1 - \sin^2 \alpha_3 = 3 - 2 = 1$.

所以②③正确, ①错误.



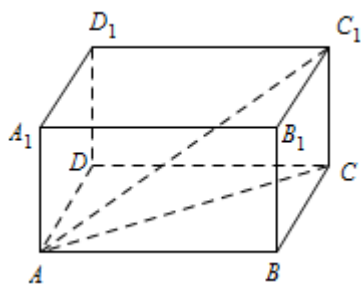
连接 AC ，由长方体的性质可得 $\angle C_1AC$ 为 AC_1 与平面 $ABCD$ 所成角，即 $\beta_1 = \angle C_1AC$ 。

$$\sin \beta_1 = \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \sin^2 \beta_1 = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{同理可得 } \sin^2 \beta_2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \sin^2 \beta_3 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{所以 } \sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_3 = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$$

所以④正确。



故答案为：②③④

9. 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离分别为 2、3、4，则 $\triangle ABC$ 的重心 G 到平面 α 的距离为_____。

【答案】1 或 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 或 3

【分析】设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $G(x, y, z)$, 平面 xOy 为平面 α , 根据重心坐标公式结合符号即可求解。

【详解】设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $G(x, y, z)$, 平面 xOy 为平面 α 。

$$\text{则 } |z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_3| = 4, z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

$$\text{当 } z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = 4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 3.$$

$$\text{当 } z_1 = -2, z_2 = 3, z_3 = 4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{当 } z_1 = -2, z_2 = -3, z_3 = 4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } z_1 = -2, z_2 = -3, z_3 = -4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = -3.$$

$$\text{当 } z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = -4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } z_1 = 2, z_2 = -3, z_3 = 4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 1.$$

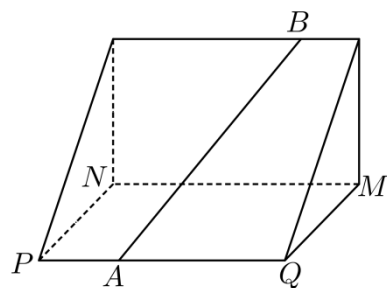
$$\text{当 } z_1 = 2, z_2 = -3, z_3 = -4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{当 } z_1 = -2, z_2 = 3, z_3 = -4 \text{ 时, } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = -1.$$

综上所述：点 G 到平面 α 的距离为：1, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, 3。

故答案为：1 或 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 或 3.

10. 如图, 某人沿山坡 PQB 的直行道 AB 向上行走, 直行道 AB 与坡脚 (直) 线 PQ 成 60° 角, 山坡与地平面所成二面角 $B-PQ-M$ 的大小为 30° . 若此人沿直行道 AB 向上行走了 200 米, 那么此时离地平面的高度为_____米.



【答案】 $50\sqrt{3}$

【分析】 如图所示作辅助线, 确定 $\angle BHG$ 即为二面角 $B-PQ-M$ 的平面角, 得到 $BH = 2BG$, 根据直角三角形中边角关系得到 $\sin \angle BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 再根据 $h = 200 \times \sin \angle BAG$, 计算得到答案.

【详解】 如图所示: 过 B 作 $BG \perp$ 平面 $PQMN$, 交 MN 于点 G , $GH \perp PQ$ 于 H , 连接 AG, BH .

$BG \perp$ 平面 $PQMN$, $PQ \subset$ 平面 $PQMN$, 故 $PQ \perp BG$, $GH \perp PQ$.

又因为 $BG \cap GH = G$, $BG, GH \subset$ 平面 BGH .

故 $PQ \perp$ 平面 BGH , 即 $\angle BHG$ 即为二面角 $B-PQ-M$ 的平面角, $\angle BHG = 30^\circ$.

故 $BH = 2BG$.

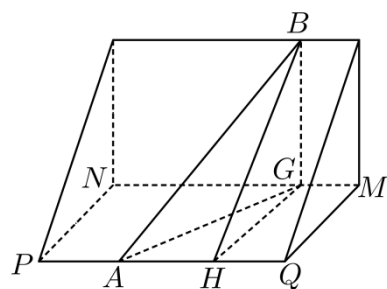
在 $Rt\triangle BAH$ 中, $\angle BAH = 60^\circ$, 故 $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}BG$.

在 $Rt\triangle AGB$ 中, $\sin \angle BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$BG \perp$ 平面 $PQMN$, $\angle BAG$ 即为 AB 与地平面 $PQMN$ 所成的角.

则离地平面的高度 $h = 200 \times \sin \angle BAG = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}$.

故答案为: $50\sqrt{3}$.



11. 如下图, 已知四边形 $ABCD, ADEF, AFGH$ 均为正方形, 先将矩形 $EDHG$ 沿 AD 折起, 使二面角 $E'-AD-B$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/666134201113010240>