宁夏石嘴山市第一高级中学2024年高三最后一模数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

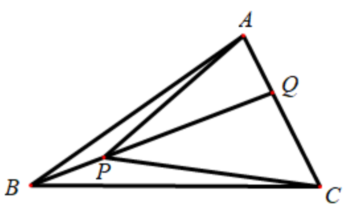
1．已知点P是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,c=\sqrt{a^2+b^2})$上一点，若点$P$到双曲线$C$的两条渐近线的距离之积为$\frac{1}{4}c^2$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

2．设椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右顶点为$A$，右焦点为$F$，$B$、$C$为椭圆上关于原点对称的两点，直线$BF$交直线$AC$于$M$，且$M$为$AC$的中点，则椭圆$E$的离心率是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

3．如图，在ΔABC中，点Q为线段AC上靠近点A的三等分点，点P为线段BQ上靠近点B的三等分点，则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=$（　　）



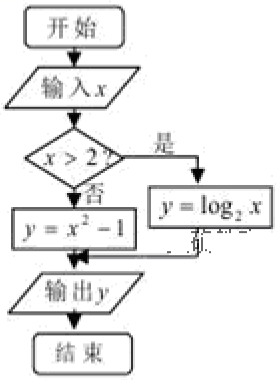
A．$\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　B．$\frac{5}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{7}{9}\overrightarrow{BC}$　　C．$\frac{1}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{10}{9}\overrightarrow{BC}$　　D．$\frac{2}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{7}{9}\overrightarrow{BC}$

4．命题p：$\forall x\in(-1,2],x^2-2x+a\geq 0(a\in\mathbf{R})$的否定为

A．$\exists x_0\in(-1,2],x_0^2-2x_0+a\geq 0(a\in\mathbf{R})$　　B．$\forall x\in(-1,2],x^2-2x+a<0(a\in\mathbf{R})$

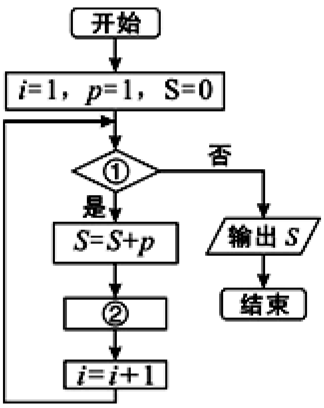
C．$\exists x_0\in(-1,2],x_0^2-2x_0+a<0(a\in\mathbf{R})$　　D．$\forall x\notin(-1,2],x^2-2x+a<0(a\in\mathbf{R})$

5．执行如图所示的程序框图，若输出的结果为3，则可输入的实数x值的个数为（　　）



A．1 **B．2** **C．3** **D．4**

6．给出50个数 1，2，4，7，11，L ，其规律是：第1个数是1，第2个数比第1个数大 1，第3个数比第2个数大2，第4个数比第3个数大3，以此类推，要计算这50个数的和．现已给出了该问题算法的程序框图如图，请在图中判断框中的①处和执行框中的②处填上合适的语句，使之能完成该题算法功能(　　)



A． $i\le 50$；$p=p+i$　　**B．** $i<50$；$p=p+i$

C． $i\le 50$；$p=p+1$　　**D．** $i<50$；$p=p+1$

7．将函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到$g\left(x\right)$的图象，则$g\left(x\right)$满足（　　）

A． 图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称，在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上为增函数

B． 函数最大值为2，图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称

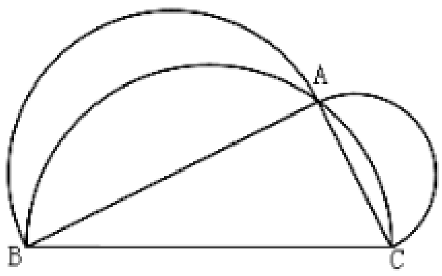
C． 图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$上的最小值为1

D． 最小正周期为π，$g\left(x\right)=1$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$有两个根

8．已知i为虚数单位，实数x,y满足$(x+2i)i=y-i$，则$|x-yi|=$ (　　)

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\sqrt{5}$

9．下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形ABC的斜边BC、直角边AB、AC，已知以直角边AC、AB为直径的半圆的面积之比为$\frac{1}{4}$，记$\angle ABC=\alpha$，则$\cos^2\alpha+\sin 2\alpha=$（　　）



A．$\frac{3}{5}$　　　　B．$\frac{4}{5}$　　　　C．1　　　　D．$\frac{8}{5}$

10．已知点 ***P*** 不在直线 ***l***、***m*** 上，则“过点 ***P*** 可以作无数个平面，使得直线 ***l***、***m*** 都与这些平面平行”是“直线 ***l***、***m*** 互相平行”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

11．博览会安排了分别标有序号为“1 号”“2 号”“3 号”的三辆车，等可能随机顺序前往酒店接嘉宾．某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案．方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车．记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 P_1，P_2，则（　　）

A．$P_1 \bullet P_2=\frac{1}{4}$　　　　B．$P_1=P_2=\frac{1}{3}$　　　　C．$P_1+P_2=\frac{5}{6}$　　　　D．$P_1<P_2$

12．已知函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像与一条平行于$x$轴的直线有两个交点，其横坐标分别为$x_1,x_2$，则$x_1+x_2=$（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　　　C．$\frac{\pi}{3}$　　　　D．$\frac{\pi}{6}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$(3x-1)\cdot\left(\frac{2}{x}-1\right)^5$的展开式中的常数项为__________.

14．设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3+S_6=S_9$，则数列$\{a_n\}$的公比q是_______.

15．已知函数$f(x)=ae^x+x^2-8x$的图象在$(0,f(0))$处的切线斜率为-4，则$a=$______.

16．已知抛物线$C:y=\frac{1}{4}x^2$的焦点为F，其准线与坐标轴交于点E，过F的直线l与抛物线C交于A、B两点，若$3\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}$，则直线$l$的斜率$k=$________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）在一次电视节目的答题游戏中，题型为选择题，只有“**A**”和“**B**”两种结果，其中某选手选择正确的概率为**p**，选择错误的概率为**q**，若选择正确则加**1**分，选择错误则减**1**分，现记“该选手答完**n**道题后总得分为S_n”.

（1）当$p=q=\frac{1}{2}$时，记$\xi=S_3$，求ξ的分布列及数学期望；

（2）当$p=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$时，求$S_8=2$且$S_i\geq 0\left(i=1,2,3,4\right)$的概率.

18．（12分）在平面直角坐标系**xOy**中，曲线**l**的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\theta\\ y=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$（$\theta$为参数），以原点**O**为极点，**x**轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线**C**的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$.

（1）求曲线**C**的普通方程；

（2）求曲线**l**和曲线**C**的公共点的极坐标.

19．（12分）已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x+ax}{e^x},a\in R$

（1）若函数$y=f(x)$在$x=x_0\left(\ln 2<x_0<\ln 3\right)$处取得极值1，证明：$2-\dfrac{1}{\ln 2}<a<3-\dfrac{1}{\ln 3}$

（2）若$f(x)\leq x-\dfrac{1}{e^x}$恒成立，求实数$a$的取值范围.

20．（12分）设函数$f(x)=\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|+|x-1|$（$x\in\mathbf{R}$）的最小值为$m$.

（1）求m的值；

（2）若a，b，c为正实数，且$\dfrac{1}{ma}+\dfrac{1}{2mb}+\dfrac{1}{3mc}=\dfrac{2}{3}$，证明：$\dfrac{a}{9}+\dfrac{2b}{9}+\dfrac{c}{3}\geq 1$.

21．（12分）已知倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线经过抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点F，与抛物线C相交于A、B两点，且$|AB|=8$.

（1）求抛物线C的方程；

（2）设P为抛物线C上任意一点（异于顶点），过P做倾斜角互补的两条直线l_1、l_2，交抛物线C于另两点C、D，记抛物线C在点P的切线l的倾斜角为α，直线CD的倾斜角为β，求证：α与β互补.

22.（10 分）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1-3t \\ y=2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

（1）求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设点 $P(-1,2)$，直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $|AB|+|PA|\cdot|PB|$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

设点 P 的坐标为 (m,n)，代入椭圆方程可得 $b^2m^2-a^2n^2=a^2b^2$，然后分别求出点 P 到两条渐近线的距离，由距离之积为 $\frac{1}{4}c^2$，并结合 $b^2m^2-a^2n^2=a^2b^2$，可得到 a,b,c 的齐次方程，进而可求出离心率的值.

【详解】

设点 P 的坐标为 (m,n)，有 $\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$，得 $b^2m^2-a^2n^2=a^2b^2$.

双曲线的两条渐近线方程为 $bx-ay=0$ 和 $bx+ay=0$，则点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为

$$\frac{|bm-an|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{|bm+an|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2m^2-a^2n^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{c^2},$$

所以 $\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{1}{4}c^2$，则 $4a^2(c^2-a^2)=c^4$，即 $\left(c^2-2a^2\right)^2=0$，故 $c^2-2a^2=0$，即 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=2$，所以 $e=\sqrt{2}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率，构造 a,b,c 的齐次方程是解决本题的关键，属于中档题.

2、C

【解析】

连接 OM ， OM 为 ΔABC 的中位线，从而 $\Delta OFM \backsim \Delta AFB$ ，且 $\dfrac{|OF|}{|FA|}=\dfrac{1}{2}$，进而 $\dfrac{c}{a-c}=\dfrac{1}{2}$，由此能求出椭圆的离心率.

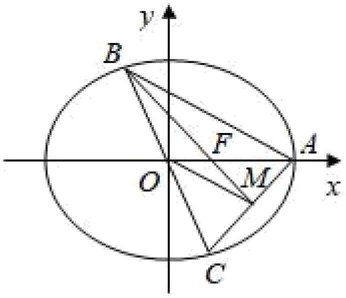
【详解】

如图，连接 OM ，

$\because$ 椭圆 E ： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右顶点为 ***A***，右焦点为 ***F***，

B、***C*** 为椭圆上关于原点对称的两点，不妨设 ***B*** 在第二象限，

直线 ***BF*** 交直线 ***AC*** 于 ***M***，且 ***M*** 为 ***AC*** 的中点



$\therefore OM$ 为 ΔABC 的中位线，

$\therefore \Delta OFM \backsim \Delta AFB$ ，且 $\dfrac{|OF|}{|FA|}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{c}{a-c}=\dfrac{1}{2}$，

解得椭圆 E 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$.

故选：**C**

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质，考查了运算求解能力，属于基础题.

3、**B**

【解析】

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BQ}$,将 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ 代入化简即可.

【详解】

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BQ}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\frac{2}{9}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{5}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{7}{9}\overrightarrow{BC}$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用，涉及到向量的线性运算、数乘运算，考查学生的运算能力，是一道中档题.

4、**C**

【解析】

命题 p 为全称命题，它的否定为特称命题，将全称量词改为存在量词，并将结论否定，可知命题 p 的否定为

$\exists x_0\in(-1,2],x_0^2-2x_0+a<0(a\in\mathbf{R})$，故选 **C**.

5、**C**

【解析】

试题分析：根据题意，当 $x\le 2$ 时，令 $x^2-1=3$，得 $x=\pm 2$；当 $x>2$ 时，令 $\log_2 x=3$，得

$x=9$，故输入的实数 x 值的个数为 **1**.

考点：程序框图.

6、**A**

【解析】

要计算这 50 个数的和，这就需要循环 **50** 次，这样可以确定判断语句①，根据累加最的变化规律可以确定语句②.

【详解】

因为计算这 50 个数的和，循环变量 i 的初值为 **1**，所以步长应该为 **1**，故判断语句①应为 $i=i+1$，第 1 个数是 1，第 2 个数比第 1 个数大 1，第 3 个数比第 2 个数大 2，第 4 个数比第 3 个数大 3，这样可以确定语句②为 $p=p+i$，故本题选 **A.**

【点睛】

本题考查了补充循环结构，正确读懂题意是解本题的关键.

7、**C**

【解析】

由辅助角公式化简三角函数式，结合三角函数图象平移变换即可求得 $g\left(x\right)$

的解析式，结合正弦函数的图象与性质即可判断各选项.

【详解】

函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$，

则 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

将 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位，

可得 $g\left(x\right)=2\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

由正弦函数的性质可知，$g\left(x\right)$的对称中心满足$2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，解得$x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$，所以 **A**、**B** 选项中的对称中心错误；

对于 **C**，$g\left(x\right)$的对称轴满足$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，所以图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称；当$x\in\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，由正弦函数性质可知$2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[1,2\right]$，所以在$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$上的最小值为 **1**，所以 **C** 正确；

对于 **D**，最小正周期为$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，由正弦函数的图象与性质可知，

$2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$时仅有一个解为$x=0$，所以 **D** 错误；

综上可知，正确的为 **C**，

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了三角函数式的化简，三角函数图象平移变换，正弦函数图象与性质的综合应用，属于中档题.

8、**D**

【解析】

$\because\left(x+2i\right)i=y-i,\therefore -2+xi=y-i,\therefore\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$，

则$\left|x-yi\right|=\left|-1+2i\right|=\sqrt{5}.$

故选 **D.**

9、**D**

【解析】

根据以直角边AC、AB为直径的半圆的面积之比求得$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，即$\tan\alpha$的值，由此求得$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的值，进而求得所求表达式的值.

【详解】

由于直角边AC、AB为直径的半圆的面积之比为$\frac{1}{4}$，所以$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，即$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

所以$\cos^2\alpha+\sin 2\alpha=\frac{4}{5}+2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{8}{5}$.

故选：**D**

【点睛】

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式，考查二倍角公式，属于基础题.

10、**C**

【解析】

根据直线和平面平行的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

$\because$点P不在直线l、m上，

$\therefore$若直线l、m互相平行，则过点P可以作无数个平面，使得直线l、m都与这些平面平行，即必要性成立，

若过点P可以作无数个平面，使得直线l、m都与这些平面平行，则直线l、m互相平行成立，反证法证明如下：

若直线l、m互相不平行，则l，m异面或相交，则过点P只能作一个平面同时和两条直线平行，则与条件矛盾，即充分性成立

则“过点P可以作无数个平面，使得直线l、m都与这些平面平行”是“直线l、m互相平行”的充要条件，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合空间直线和平面平行的性质是解决本题的关键.

11、**C**

【解析】

将三辆车的出车可能顺序一一列出，找出符合条件的即可.

【详解】

三辆车的出车顺序可能为：**123、132、213、231、312、321**

方案一坐车可能：**132、213、231**，所以，$P_1=\frac{3}{6}$；

方案二坐车可能：**312**、**321**，所以，$P_1=\frac{2}{6}$；

所以 $P_1+P_2=\frac{5}{6}$

故选 **C.**

【点睛】

本题考查了古典概型的概率的求法，常用列举法得到各种情况下基本事件的个数，属于基础题.

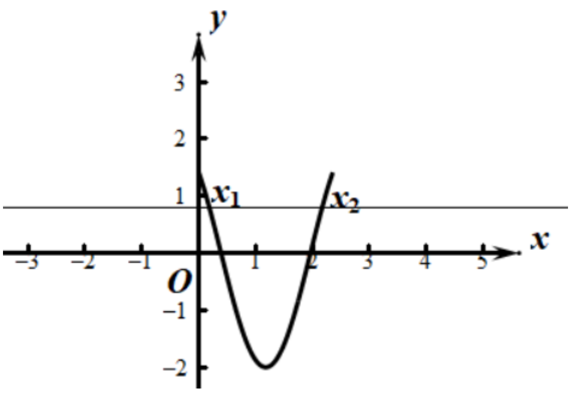
12、**A**

【解析】

画出函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像，函数对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，即得解.

【详解】

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像如图，



对称轴方程为 $2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又Q $0<x<\frac{3\pi}{4},\therefore x=\frac{3\pi}{8}$，

由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

故选：**A**