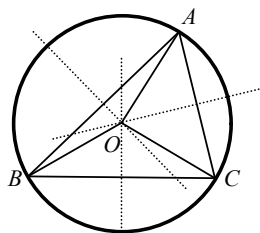


高考数学专题突破：三角形的五心与向量

一、外心

1. 定义：三角形的三条边的垂直平分线交于一点，这点称为三角形的外心(外接圆圆心)。

三角形的外心到三角形的三个顶点距离相等，都等于三角形的外接圆半径。



2. 性质：

① 锐角三角形的外心在三角形内；直角三角形的外心在斜边中点；钝角三角形的外心在三角形外。

② 三角形的外接圆有且只有一个，即对于给定的三角形，其外心是唯一的，但一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合。

③ $OA=OB=OC=R$

④ $\angle BOC=2\angle BAC$, $\angle AOB=2\angle ACB$, $\angle COA=2\angle CBA$

⑤ $S_{\triangle ABC}=abc/4R$

⑥ $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ (或 $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2$)

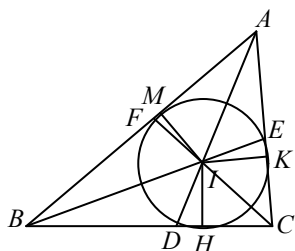
⑦ $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = \sin\angle BOC : \sin\angle AOC : \sin\angle AOB = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

故 $\sin 2A \overrightarrow{OA} + \sin 2B \overrightarrow{OB} + \sin 2C \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

二、内心

1. 定义：三角形的三条内角平分线交于一点，这点称为三角形的内心(内切圆圆心)。

三角形的内心到三边的距离相等，都等于三角形内切圆半径。



2. 性质：①内切圆半径 r 的计算：设三角形面积为 S , $r=2S/(a+b+c)$

特别的，在直角三角形中，有 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$ 。

② $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$ $\angle BOA = 90^\circ + \angle C/2$ $\angle AOC = 90^\circ + \angle B/2$

③ $S_{\triangle ABC} = [(a+b+c)r]/2$ (r 是内切圆半径)

④ O 是内心 $\triangle ABC$ 的充要条件是

$$\overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \overrightarrow{OB} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} - \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \right) = \overrightarrow{OC} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right) = 0$$

引进单位向量，使条件变得更简洁。如果记 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 的单位向量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ，则刚才 O 是 $\triangle ABC$ 内心的充要条件

$$\text{可以写成 } \overrightarrow{OA} \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \overrightarrow{OB} \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \overrightarrow{OC} \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 0$$

⑤ O 是 $\triangle ABC$ 内心的充要条件也可以是 $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

⑥ 若 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = a : b : c$

$$\text{故 } a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ 或 } \sin A \overrightarrow{OA} + \sin B \overrightarrow{OB} + \sin C \overrightarrow{OC} = \vec{0};$$

⑦ $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{PC} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot \overrightarrow{PA} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \cdot \overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow P$ 是 $\triangle ABC$ 的内心;

⑧ 向量 $\lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) (\lambda \neq 0)$ 所在直线过 $\triangle ABC$ 的内心 (是 $\angle BAC$ 的角平分线所在直线);

三、垂心

1. 定义：三角形的三条高交于一点，这点称为三角形的垂心。

2. 性质：

①锐角三角形的垂心在三角形内；直角三角形的垂心在直角顶点上；钝角三角形的垂心在三角形外

② 垂心 O 关于三边的对称点，均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上

③ $\triangle ABC$ 中，有六组四点共圆，有三组（每组四个）相似的直角三角形，且 $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$

④ H 、 A 、 B 、 C 四点中任一点是其余三点为顶点的三角形的垂心（并称这样的四点为一——垂心组）。

⑤ $\triangle ABC$ ， $\triangle ABO$ ， $\triangle BCO$ ， $\triangle ACO$ 的外接圆是等圆。

⑥在非直角三角形中，过 O 的直线交 AB 、 AC 所在直线分别于 P 、 Q ，则 $AB/AP \cdot \tan B + AC/AQ \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

⑦三角形任一顶点到垂心的距离，等于外心到对边的距离的 2 倍。

⑧设 O ， H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，则 $\angle BAO = \angle HAC$ ， $\angle ABH = \angle OBC$ ， $\angle BCO = \angle HCA$ 。

⑨锐角三角形的垂心到三顶点的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和的 2 倍。

⑩锐角三角形的垂心是垂足三角形的内心；锐角三角形的内接三角形（顶点在原三角形的边上）中，以垂足三角形的周长最短。

⑩三角形的垂心是它垂足三角形的内心；或者说，三角形的内心是它旁心三角形的垂心；

⑩ O 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ ；

⑩若 O 是 $\triangle ABC$ (非直角三角形)的垂心，则 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = \tan A : \tan B : \tan C$

故 $\tan A \overrightarrow{OA} + \tan B \overrightarrow{OB} + \tan C \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

四、重心

1. 定义：三角形的三条中线交于一点，这点称为三角形的重心。

2. 性质：

①三角形的重心到边的中点与到相应顶点的距离之比为 1 : 2.

②重心和三角形 3 个顶点组成的 3 个三角形面积相等。

③在平面直角坐标系中，重心的坐标是顶点坐标的算术平均，即其坐标为 $((X_1+X_2+X_3)/3, (Y_1+Y_2+Y_3)/3)$ ；

④重心和三角形 3 个顶点的连线的任意一条连线将三角形面积平分。

⑤重心到三角形 3 个顶点距离的平方和最小。

⑥重心是三角形内到三边距离之积最大的点。

⑦O 是 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;

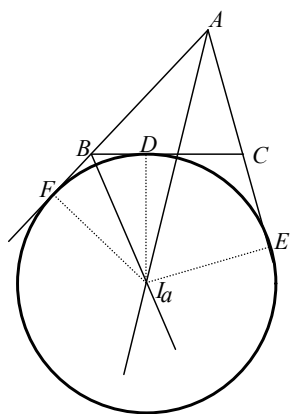
⑧若 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 故 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;

⑨ $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \Leftrightarrow G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心.

五、旁心

1. 定义：三角形的一条内角平分线与另两个外角平分线交于一点，称为三角形的旁心(旁切圆圆心)。

每个三角形都有三个旁切圆。



一、单选题（共 31 题；共 62 分）

1. 点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 垂心 B. 重心 C. 内心 D. 外心

2. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外一点, H 是 P 在 α 内的射影, 且 PA, PB, PC 与 α 所成的角相等, 则 H 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心 B. 外心 C. 垂心 D. 重心

3. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形, 点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心, $SA=a$, 则此三棱锥体积最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ C. $\frac{a^3}{3}$ D. $\frac{a^3}{6}$

4. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 那么 ()

- A. $\vec{AO} = \vec{OD}$ B. $\vec{AO} = 2\vec{OD}$ C. $\vec{AO} = 3\vec{OD}$ D. $2\vec{AO} = \vec{OD}$

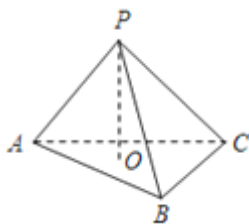
5. 点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足为 O , 若 $PA=PB=PC$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 垂心 B. 重心 C. 内心 D. 外心

6. 生于瑞士的数学巨星欧拉在 1765 年发表的《三角形的几何学》一书中有这样一个定理: “三角形的外心、垂心和重心都在同一直线上, 而且外心和重心的距离是垂心和重心距离之半.” 这就是著名的欧拉线定理. 设 $\triangle ABC$ 中, 设 O, H, G 分别是外心、垂心和重心, 下列四个选项错误的是 ()

- A. $HG=2OG$ B. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
C. 设 BC 边中点为 D , 则有 $AH=3OD$ D. $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$

7. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC$, $PO \perp$ 面 ABC , 垂足为 O , 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()



- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

8. 三个等圆 O_1, O_2, O_3 有公共点 M , 点 A, B, C 是其他交点, 则点 M 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 垂心 D. 重心

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=5$, 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{BC} =$ ()

- A. 34 B. 16 C. 8 D. 0

10. 已知 $\triangle ABC$ 所在平面上的动点 M 满足 $2\vec{AM} \cdot \vec{BC} = \vec{AC}^2 - \vec{AB}^2$, 则 M 点的轨迹过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心 B. 垂心 C. 重心 D. 外心

11. $\triangle ABC$ 的三个顶点所对的复数分别为 z_1 , z_2 , z_3 , 复数 z 满足 $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$, 则 z 的对应点是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

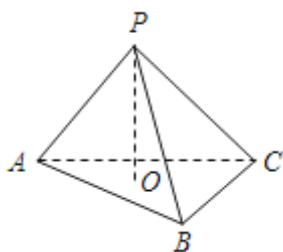
12. 若三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱与底面所成的角都相等, 则点 P 在底面 ABC 上的射影一定是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 外心 B. 垂心 C. 内心 D. 重心

13. $\triangle ABC$ 中, 点 $A(4, -1)$, AB 的中点为 $M(3, 2)$, 重心为 $P(4, 2)$, 则边 BC 的长为 ()

- A. 5 B. 4 C. 10 D. 8

14. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC$, $PO \perp$ 面 ABC , 垂足为 O , 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()



- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

15. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 顶点 P 在底面 ABC 中的射影为 O , 若

- (1) 三条侧棱与底面所成的角相等,
(2) 三条侧棱两两垂直,
(3) 三个侧面与底面所成的角相等;

则点 O 中依次为垂心、内心、外心的条件分别是 ()

- A. (1) (2) (3) B. (3) (2) (1) C. (2) (1) (3) D. (2) (3) (1)

16. 下列说法正确的是 ()

- A. 三角形的重心是三条边的垂直平分线的交点 B. 三角形的垂心是三条边的垂直平分线的交点
C. 三角形的内心是三个内角的角平分线的交点 D. 三角形的外心是三个内角的角平分线的交点

17. 空间四边形 $ABCD$, 若 AB 、 AC 、 AD 与平面 BCD 所成角相等, 则 A 点在平面 BCD 的射影为 $\triangle BCD$ 的 ()

- A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心

18. 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重点 B. 外心 C. 内心 D. 垂心

19. 三棱锥 $P-ABC$ 的高为 PH , 若三个侧面两两垂直, 则 H 一定为 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 垂心 B. 外心 C. 内心 D. 重心

20. 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A, B, C 为抛物线上不同的三点, 点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心, O 为坐标原点, $\triangle OFA$ 、 $\triangle OFB$ 、 $\triangle OFC$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 , 则 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 =$ ()

- A. 9 B. 6 C. 3 D. 2

21. 如图所示, 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 作直线与 AB , AC 两边分别交于 M , N 两点, 且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{xy}{x+y}$ 的值为 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

22. 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left[\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin C} \right]$, $\lambda > 0$, 则动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

23. 已知三条相交于一点的线段 PA , PB , PC 两两垂直, 且 A , B , C 在同一平面内, P 在平面 ABC 外, $PH \perp$ 平面 ABC 于 H , 则垂足 H 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心

24. 点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足为 O , 若 $PA=PB=PC$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 垂心 B. 重心 C. 内心 D. 外心

25. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ($\lambda, \mu \in R$) 若 $\angle A = 120^\circ$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$, 则 $|\overrightarrow{AG}|$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

26. 生于瑞士的数学巨星欧拉在 1765 年发表的《三角形的几何学》一书中有这样一个定理: “三角形的外心、垂心和重心都在同一直线上, 而且外心和重心的距离是垂心和重心距离之半.” 这就是著名的欧拉线定理. 设 $\triangle ABC$ 中, 设 O 、 H 、 G 分别是外心、垂心和重心, 下列四个选项错误的是 ()

- A. $HG=2OG$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
C. 设 BC 边中点为 D , 则有 $AH=3OD$ D. $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BCG}=S_{\triangle ACG}$

27. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 P 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 外心 C. 垂心 D. 内心

28. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，给出下列关系式：

- (1) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$;
 (2) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$;
 (3) $\vec{OA} \cdot \left(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} - \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right) = \vec{OB} \cdot \left(\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} - \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right) = 0$;
 (4) $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{BC} = 0$.

则点 O 依次为 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心、外心、重心、垂心
 B. 重心、外心、内心、垂心
 C. 重心、垂心、内心、外心
 D. 外心、内心、垂心、重心

29. 若长度为定值的线段 AB 的两端点分别在 x 轴正半轴和 y 轴正半轴上移动，O 为坐标原点，则 $\triangle ABC$ 的重心、内心、外心、垂心的轨迹都不可能是 ()

- A. 点
 B. 线段
 C. 圆弧
 D. 抛物线的一部分

30. 设 $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(4, 2)$, 若线段 AD 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，则点 D 的坐标是 () .

- A. (-8, 6)
 B. (8, -6)
 C. (4, -6)
 D. (4, -3)

31. 已知 A, B, C 三点不在同一条直线上，O 是平面 ABC 内一定点，P 是 $\triangle ABC$ 内的一动点，若

$\vec{OP} - \vec{OA} = \lambda \left(\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则直线 AP 一定过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心
 B. 垂心
 C. 外心
 D. 内心

二、填空题 (共 11 题; 共 11 分)

32. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心， $|\vec{AB}|=16$, $|\vec{AC}|=10\sqrt{2}$, 若 $\vec{AO}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$, 且 $32x+25y=25$, 则 $|\vec{AO}|=$ _____

33. 已知 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 5、12、13, 则 $\triangle ABC$ 的外心 O 到重心 G 的距离为_____

34. M 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} =$ _____.

35. O 是平面上一定点，A, B, C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty]$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的_____心.

36. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心， $|\vec{AB}|=16$, $|\vec{AC}|=10\sqrt{2}$, 若 $\vec{AO}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$, 且 $32x+25y=25$, 则 $|\vec{AO}|=$ _____

37. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，若 $\angle A = 120^\circ$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$ ，则 $|\overrightarrow{AG}|$ 的最小值是_____

38. 过 $\triangle ABC$ 所在平面 α 外一点，作 $PO \perp \alpha$ ，垂足为 O ，连接 PA ， PB ， PC 。若 $PA = PB = PC$ ，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的_____心。

39. P 点在 $\triangle ABC$ 所在的平面外， O 点是 P 点在平面 ABC 内的射影， PA 、 PB 、 PC 两两垂直，则 O 点是 $\triangle ABC$ 的_____。（填外心，内心，垂心，重心）

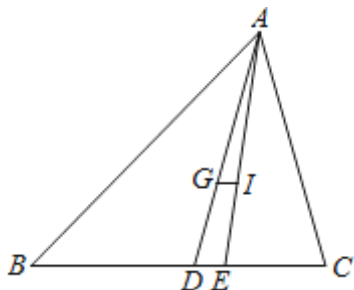
40. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， O 为 P 在平面 ABC 上的射影。若 $PA \perp BC$ ， $PB \perp AC$ ，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的_____心。

41. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， O 为点 P 在平面 ABC 内的射影，若 $PA = PB = PC$ ，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的_____心。

42. 已知 $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心，1 为半径的圆，且 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____。

三、解答题（共 2 题；共 10 分）

43. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， G 为重心， I 为内心。若 $GI \parallel BC$ ，证明： AB ， BC ， CA 三边长成等差数列。



44. 将半径为 72cm 的扇形 OAB 剪去小扇形 OCD ，余下扇环 $ABCD$ 的面积为 $648\pi \text{cm}^2$ ，围成圆台后，其上、下底半径之差为 6cm，求该圆台的体积。

答案解析

一、单选题

1. 【答案】D

【考点】三角形五心

【解析】【解答】证明：点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，故 $\triangle POA$ ， $\triangle POB$ ， $\triangle POC$ 都是直角三角形

$\because PO$ 是公共边， $PA=PB=PC$

$\therefore \triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$

$\therefore OA=OB=OC$

故 O 是 $\triangle ABC$ 外心

故选 D.

【分析】点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，可证得 $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$ ，从而证得 $OA=OB=OC$ ，符合这一性质的点 O 是 $\triangle ABC$ 外心.

2. 【答案】B

【考点】三角形五心，直线与平面所成的角

【解析】【解答】解： $\because PA, PB, PC$ 与 α 所成的角相等，H 是 P 在 α 内的射影， $\therefore HA=HB=HC$
 $\therefore H$ 为三角形的外心.

故选：B.

【分析】根据 PA, PB, PC 与 α 所成的角相等，H 是 P 在 α 内的射影，可得 $HA=HB=HC$ ，从而可得结论.

3. 【答案】D

【考点】三角形五心，球的体积和表面积

【解析】【解答】解：点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是三角形 SBC 的垂心，AD 为 BC 边上的高 $\therefore SA \perp BC$ ， $SC \perp AB$.

设 O 为 S 在底面的射影，

则 $BC \perp$ 面 SAD，则 O 一定在 AD 上，

$AB \perp SC$ ， $AB \perp SO$ ，所以 $CO \perp AB$ ，

所以 O 是底面 ABC 的垂心. 也是外心，

$\therefore SA=SB=SC=a$.

则当 SA, SB, SC 互相垂直时体积最大

此时 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}$

故选 D

【分析】由已知中点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心，我们易证明出三棱锥 S-ABC 的三条侧棱也相等，则三棱锥 S-ABC 的三条侧棱互相垂直时，体积取最大值，代入体积公式，即可求出答案.

4. 【答案】A

【考点】零向量，三角形五心

【解析】 【解答】解： $\because 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, $\because D$ 为 BC 边中点,
 $\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$, 则 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$,

故选：A.

【分析】先根据所给的式子进行移项，再由题意和向量加法的四边形法则，得到 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ ，即有 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$ 成立.

5. 【答案】D

【考点】三角形五心

【解析】【解答】证明：点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，故 $\triangle POA$ ， $\triangle POB$ ， $\triangle POC$ 都是直角三角形

$\because PO$ 是公共边， $PA=PB=PC$

$\therefore \triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$

$\therefore OA=OB=OC$

故 O 是 $\triangle ABC$ 外心

故选 D.

【分析】点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，可证得 $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$ ，从而证得 $OA=OB=OC$ ，符合这一性质的点 O 是 $\triangle ABC$ 外心.

6. 【答案】C

【考点】三角形五心

【解析】【解答】 $\triangle ABC$ 中，O、H、G 分别是外心、垂心和重心，画出图形，如图所示：

对于 A，根据欧拉线定理得 $HG=2OG$ ，选项 A 正确；

对于 B，根据三角形的重心性质得 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ，选项 B 正确；

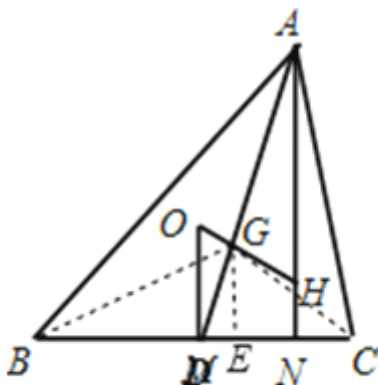
对于 C， $\because AH \parallel OD$ ， $\therefore \triangle AHG \sim \triangle DOG$ ， $\therefore \frac{AH}{OD} = \frac{AG}{DG} = 2$ ， $\therefore AH=2OD$ ，选项 C 错误；

对于 D，过点 G 作 $GE \perp BC$ ，垂足为 E，则 $\frac{GE}{AN} = \frac{DG}{DA} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \triangle BGC$ 的面积为 $S_{\triangle BGC} = \frac{1}{2} \times BC \times GE = \frac{1}{2} \times BC \times \frac{1}{3} \times AN = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ ；

同理， $S_{\triangle AGC} = S_{\triangle AGB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ ，选项 D 正确.

故选：C.



【分析】根据题意，画出图形，结合图形，利用欧拉线定理得出选项 A 正确；

根据三角形的重心性质得出选项 B 正确；

根据 $\triangle AHG \sim \triangle DOG$ ，判断选项 C 错误；

求出 $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle AGC} = S_{\triangle AGB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ ，判断选项 D 正确。

7. 【答案】B

【考点】三角形五心，棱锥的结构特征

【解析】【解答】解：由题意点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PO \perp$ 平面 ABC，垂足为 O，若 $PA=PB=PC$ ，则它们在底面上的射影也相等，由此知点 O 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离是相等的，由外心的定义知，点 O 是三角形的外心。

故选 B。

【分析】由题设条件知，三条斜线在底面的射影是相等的，即此点到底面三角形三个顶点的距离是相等的，由引可以得出此点应该是三角形的外心。

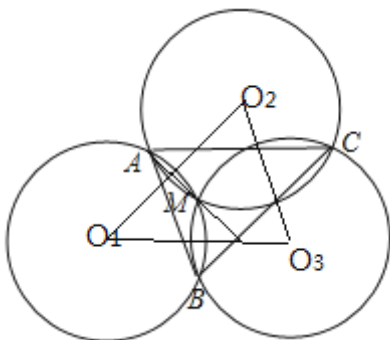
8. 【答案】C

【考点】三角形五心

【解析】【解答】解：如图所示，

可知点 M 是 $\triangle ABC$ 的垂心，

故选 C。



【分析】作图说明即可。

9. 【答案】C

【考点】三角形五心

【解析】【解答】解：设圆的半径为 R， $\angle AOB$ 为 α ， $\angle AOC$ 为 β ，则

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \times BO \cos \alpha = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha, \quad AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2AO \times CO \cos \beta = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta$$

$$\therefore \vec{AO} \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) = \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} = R^2 \cos \alpha - R^2 \cos \beta = \frac{AC^2 - AB^2}{2}$$

$$\because AB=3, AC=5, \therefore \frac{AC^2 - AB^2}{2} = 8$$

$$\therefore \vec{AO} \cdot \vec{BC} = 8$$

故选 C。

【分析】先利用余弦定理，求 AB，AC，再利用向量的数量积，即可得到结论。

10. 【答案】D

【考点】三角形五心

【解析】【解答】解：∵ $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\therefore (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\therefore (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0, \text{ 即 } \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2, \text{ 即 } MC = MB$$

∴ M 在边 BC 的垂直平分线，

由三角形外心的定义知，M 点的轨迹过△ABC 的外心，

故选 D.

【分析】先对题设中的等式 $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2$ 进行变形，可得 $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ ，可得 M 在中线上，由此选出正确选项.

11. 【答案】A

【考点】三角形五心

【解析】【解答】解：∵ $|Z - Z_1| = |Z - Z_2| = |Z - Z_3|$

∴ Z 到三个顶点的距离相等，

∴ Z 是三角形的外接圆的圆心，

故选 A.

【分析】根据 Z 到三角形三个顶点的距离相等，得到三角形三个顶点

12. 【答案】A

【考点】三角形五心

【解析】【解答】解：设点 P 在底面 ABC 上的射影点为 O，

$$\therefore \angle PAO = \angle PBO = \angle PCO,$$

$$PO = PO = PO,$$

$$\angle POA = \angle POB = \angle POC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO \cong \triangle PCO,$$

$$\therefore AO = BO = CO$$

∴ O 是△ABC 的外心.

故选 A.

【分析】设点 P 在底面 ABC 上的射影点为 O，由 $\angle PAO = \angle PBO = \angle PCO$ ， $PO = PO = PO$ ， $\angle POA = \angle POB = \angle POC = 90^\circ$ ，先证明 $\triangle PAO \cong \triangle PBO \cong \triangle PCO$ ，从而得到 $AO = BO = CO$ ，由此可知 O 是△ABC 的外心.

13. 【答案】A

【考点】三角形五心