专题02 第二章 直线和圆的方程 典型例题讲解（二）

目录

一、基本概念回归

知识回顾1：圆的方程

1.1 圆的标准方程

我们把方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$称为圆心为$A(a,b)$半径为r的圆的标准方程.

1.2 圆的一般方程

对于方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（D,E,F为常数），当$D^2+E^2-4F>0$时，方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$叫做圆的一般方程.

①当$D^2+E^2-4F>0$时，方程表示以$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$为圆心，以$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆；

②当$D^2+E^2-4F=0$时，方程表示一个点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

③当$D^2+E^2-4F<0$时，方程不表示任何图形

说明：圆的一般式方程特点：①x^2和y^2前系数相等（注意相等，不一定要是1）且不为0；②没有xy项；

③ $D^2+E^2-4F>0$.

知识回顾 2：点与圆的位置关系

判断点$M(x_0,y_0)$与e A：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$位置关系的方法:

（1）几何法（优先推荐）

设$M(x_0,y_0)$到圆心$A(a,b)$的距离为d，则$d=|MA|$

①$d>r \Leftrightarrow$则点$M(x_0,y_0)$在e A外

②$d=r \Leftrightarrow$则点$M(x_0,y_0)$在e A上

③$d<r \Leftrightarrow$则点$M(x_0,y_0)$在e A内

（2）代数法

将点$M(x_0,y_0)$带入e A：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$方程内

①点$M(x_0,y_0)$在e A外$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$

②点$M(x_0,y_0)$在e A上$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

③点$M(x_0,y_0)$在e A内$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

知识回顾 3：直线与圆的位置关系

3.1 几何法（优先推荐）

图象			
位置关系	相交	相切	相离
	$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$； $l:Ax+By+C=0$。 圆心$C(a,b)$到直线l	$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$； $l:Ax+By+C=0$。 圆心$C(a,b)$到直线l	$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$； $l:Ax+By+C=0$。 圆心$C(a,b)$到直线l

判定方法	的距离：$d=\frac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d<r\Rightarrow$ 圆与直线相交。	的距离：$d=\frac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d=r\Rightarrow$ 圆与直线相切。	的距离：$d=\frac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d>r\Rightarrow$ 圆与直线相离。

3.2 代数法

直线l：$Ax+By+C=0$；圆M $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

联立$\begin{cases}Ax+By+C=0\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$消去"$y$"得到关于"$x$"的一元二次函数$ax^2+bx+c=0$

①$\Delta>0\Leftrightarrow$ 直线l与圆M 相交

②$\Delta=0\Leftrightarrow$ 直线l与圆M 相切

③$\Delta<0\Leftrightarrow$ 直线l与圆M 相离

记直线l被圆C截得的弦长为$|AB|$的常用方法

知识回顾 4：直线与圆相交弦长

4.1、几何法（优先推荐）

①弦心距（圆心到直线的距离）

②弦长公式： $AB=2\sqrt{r^2-d^2}$

4.2、代数法

直线l：$Ax+By+C=0$；圆M $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

联立$\begin{cases}Ax+By+C=0\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$消去"$y$"得到关于"$x$"的一元二次函数$ax^2+bx+c=0$

弦长公式：$AB=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

知识回顾 5：圆与圆的位置关系

5.1 几何法

设$\odot C_1$的半径为r_1，$\odot C_2$的半径为r_2，两圆的圆心距为$d=|C_1C_2|$.

①当$\left|r_1-r_2\right|<d<r_1+r_2$时，两圆相交；

②当$r_1+r_2=d$时，两圆外切；

③当$r_1+r_2<d$时，两圆外离；

④当$\left|r_1-r_2\right|=d$时，两圆内切；

⑤当$\left|r_1-r_2\right|>d$时，两圆内含.

5.2 代数法

设$\odot C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$

$\odot C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$

联立$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2\end{cases}$消去“$y$”得到关于“$x$”的一元二次方程$px^2+qx+r=0$，求出其

$\Delta=q^2-4pr$

①$\Delta=q^2-4pr>0\Leftrightarrow\odot C_1$与设设$\odot C_1$相交

②$\Delta=q^2-4pr=0\Leftrightarrow\odot C_1$与设设$\odot C_1$相切（内切或外切）

③$\Delta=q^2-4pr<0\Leftrightarrow\odot C_1$与设设$\odot C_1$相离（内含或外离）

知识回顾 6：圆与圆的公共弦

6.1、圆与圆的公共弦

圆与圆相交得到的两个交点，这两点之间的线段就是两圆的公共弦.

6.2、公共弦所在直线的方程

设$\odot C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$

$\odot C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$

联立作差得到：$Ax+By+C=0$即为两圆共线方程

二、重点例题（高频考点）

高频考点一：圆的方程

1．（2023 秋·湖北武汉·高三武汉市第六中学校联考阶段练习）圆心在直线$x+y-1=0$上且与直线$2x-y-1=0$相切于点$(1,1)$的圆的方程是_______.

【答案】$(x+1)^2+(y-2)^2=5$

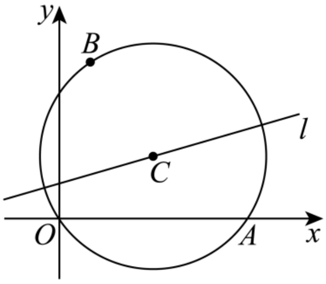
【详解】依题意，过切点$(1,1)$的圆的半径所在直线方程为$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即$x+2y-3=0$，

由$\begin{cases}x+y-1=0\\x+2y-3=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，因此所求圆的圆心为$(-1,2)$，半径$r=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$，

所以所求圆的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

故答案为：$(x+1)^2+(y-2)^2=5$

2．（2023·全国·高二课堂例题）如图所示，设圆C的圆心C在直线l：$2x-7y+8=0$上，且$A(6,0)$，$B(1,5)$都是圆C上的点，求圆的标准方程.



【答案】$(x-3)^2+(y-2)^2=13$

【详解】设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

由题意得$\begin{cases}(6-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\2a-7b+8=0,\end{cases}$

解得$a=3$，$b=2$，$r^2=13$，

因此所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=13$．

3．（2023 秋·高二课时练习）已知某圆经过$A(-2,2)$，$B(6,0)$两点，圆心M在直线$2x-y=1$上，求该圆的方程．

【答案】$(x-3)^2+(y-5)^2=34$

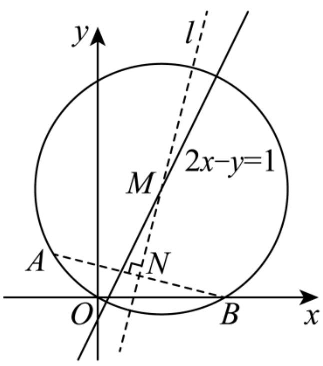
【详解】（方法一）设圆心为$M(a,b)$，半径为r，

则圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．

由题意可得方程组$\begin{cases}(-2-a)^2+(2-b)^2=r^2\\(6-a)^2+(0-b)^2=r^2\\2a-b=1\end{cases}$．

解此方程组，得$\begin{cases}a=3\\b=5\\r=\sqrt{34}\end{cases}$，故所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-5)^2=34$．

（方法二）如图，由于圆心M到点A，B的距离相等（都等于半径），



因此圆心M在AB的垂直平分线l上，并且处于直线l与直线$2x-y=1$的交点处．

因为$l \perp AB$，所以$\overrightarrow{AB}=(8,-2)$是$l$的法向量，

故可设直线l的方程为$8x-2y+C=0$．　①

又直线l过AB的中点N，而N的坐标为$\left(\dfrac{-2+6}{2},\dfrac{2+0}{2}\right)$，

即$N(2,1)$，将其代入①式，解得$C=-14$．

所以直线l的方程为$8x-2y-14=0$，即$4x-y=7$．

圆心M的坐标是方程组$\begin{cases}4x-y=7\\2x-y=1\end{cases}$的解，

解此方程组，得$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$．所以圆心$M$的坐标为$(3,5)$．

圆的半径$r=|AM|=\sqrt{(3+2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$．

故所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-5)^2=34$．

4．（2023秋·高二课时练习）求过点$(2,-1)$，圆心在直线$2x+y=0$上，且与直线$x-y-1=0$相切的圆的方程．

【答案】$(x-1)^2+(y+2)^2=2$或$(x-9)^2+(y+18)^2=338$

【详解】依题意，设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则圆心坐标为(a,b)，半径为$r(r>0)$，

由题意得：$\begin{cases}2a+b=0\\(2-a)^2+(-1-b)^2=r^2\\\dfrac{|a-b-1|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}$，

由$2a+b=0$得$2a=-b$，

将$b=-2a$代入$(2-a)^2+(-1-b)^2=r^2$，得$(2-a)^2+(-1+2a)^2=r^2$，

将$b=-2a$代入$\dfrac{|a-b-1|}{\sqrt{2}}=r$，同时平方，得$(3a-1)^2=2r^2$，

从而有$2(2-a)^2+2(-1+2a)^2=(3a-1)^2$，解得$a=1$或$a=9$，

当$a=1$时，$b=-2$，$r=\sqrt{2}$，则圆的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$；

当$a=9$时，$b=-18$，$r=13\sqrt{2}$，则圆的方程为$(x-9)^2+(y+18)^2=338$；

综上：所求圆的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$或$(x-9)^2+(y+18)^2=338$．

5．（2023秋·高二课时练习）求经过$A(1,0)$、$B(3,0)$、$C(2,2)$三点的圆的方程．

【答案】$x^2+y^2-4x-\dfrac{3}{2}y+3=0$

【详解】设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中D、E、F是待定常数．

因为点 $A(1,0)$、$B(3,0)$、$C(2,2)$ 在所求圆上，

所以 $\begin{cases} D+F+1=0 \\ 3D+F+9=0 \\ 2D+2E+F+8=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} D=-4 \\ E=-\dfrac{3}{2} \\ F=3 \end{cases}$，

此时 $D^2+E^2-4F=\dfrac{25}{4}>0$，满足题意，

因此所求圆的一般方程为 $x^2+y^2-4x-\dfrac{3}{2}y+3=0$.

6．（2023 秋·高二课时练习）$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1,0),B(3,0),C(3,4)$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

【答案】$(x-2)^2+(y-2)^2=5$

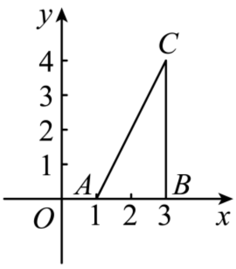
【详解】解法一（待定系数法）

设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则 $\begin{cases} (1-a)^2+b^2=r^2, \\ (3-a)^2+b^2=r^2, \\ (3-a)^2+(4-b)^2=r^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=2, \\ r=\sqrt{5}, \end{cases}$

所以外接圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

解法二（几何法）



$|AB|=2,|BC|=4,|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，

易知，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B=90^\circ$，

所以圆心是斜边 AC 的中点 $(2,2)$，半径是斜边长的一半，即 $r=\sqrt{5}$，

所以外接圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

高频考点二：与圆有关的最值问题

1．（2023·全国·高三专题练习）若平面内两定点 A，B 间的距离为 2，动点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，则 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最小值为是（　）

A. $36-24\sqrt{2}$　　B. $48-24\sqrt{2}$

C. $36\sqrt{2}$　　D. $24\sqrt{2}$

【答案】A

【详解】以经过 A，B 的直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，

建立平面直角坐标系，则 $A(-1,0)$， $B(1,0)$，

设 $P(x,y)$，因为 $\frac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，所以 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{2}$，

两边平方并整理，得 $x^2+y^2-6x+1=0$，即 $(x-3)^2+y^2=8$，

所以点 P 的轨迹是以 $(3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆，

则 $|PA|^2+|PB|^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2$，

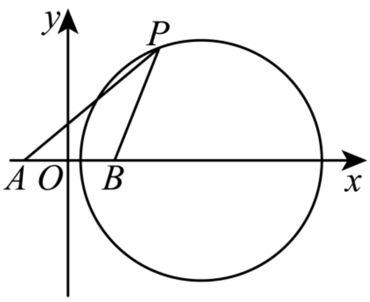
因为 $x^2+y^2-6x+1=0$，所以 $|PA|^2+|PB|^2=2(6x-1)+2=12x$，

由 $y^2=8-(x-3)^2\geq 0$，得 $3-2\sqrt{2}\leq x\leq 3+2\sqrt{2}$，

所以 $36-24\sqrt{2}\leq 12x\leq 36+24\sqrt{2}$，

由此可知 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最小值为 $36-24\sqrt{2}$．

故选：A.



2. （2023秋·云南昆明·高三昆明一中校考阶段练习）已知点 $A(-3,0)$， $B(3,0)$， $C(-1,0)$，点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，则点 P 到点 C 距离的最大值为__________.

【答案】10

【详解】设 $P(x,y)$，

$\because |PA|=2|PB|$，$\therefore (x+3)^2+y^2=4\left[(x-3)^2+y^2\right]$，化简得 $(x-5)^2+y^2=16$．

则点 P 的轨迹是以 $D(5,0)$ 为圆心，半径等于 4 圆，

$\because |CD|=6$，故 $|PC|$ 的最大值为 $|CD|+4=10$，

故答案为：10.

3. （2023·全国·高三专题练习）设点 $P(x,y)$ 是圆：$(x-3)^2+y^2=4$ 上的动点，定点 $A(0,2),B(0,-2)$，则

$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的最大值为____.

【答案】10

【详解】由题意知，$\overrightarrow{PA}=\left(-x,2-y\right),\overrightarrow{PB}=\left(-x,-2-y\right)$，

所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\left(-2x,-2y\right)$，

由于点$P\left(x,y\right)$是圆上的点,故其坐标满足方程$\left(x-3\right)^2+y^2=4$，

故$y^2=-(x-3)^2+4$，

所以$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{4x^2+4y^2}=2\sqrt{6x-5}$.

由圆的方程$(x-3)^2+y^2=4$，易知$1\le x\le 5$，

所以当$x=5$时，$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的值最大，最大值为$2\sqrt{6\times 5-5}=10$.

故答案为：10

4．（2023·全国·高二专题练习）点$P(-3,1)$在动直线$m(x-1)+n(y-1)=0$上的投影为点M，若点$N(3,3)$，那么$|MN|$的最小值为______.

【答案】$2\sqrt{5}-2$

【详解】解：因为直线$m(x-1)+n(y-1)=0$过定点$A\left(1,1\right)$，且$PM\perp AM$，

所以M的轨迹是以P,A为直径的圆，且圆心为$C\left(-1,1\right)$，半径$R=2$，

所以$|MN|_{\min}=|CN|-R=\sqrt{\left(3-(-1)\right)^2+2^2}-2=2\sqrt{5}-2$，

故答案为：$2\sqrt{5}-2$.

5．（2023秋·高二课时练习）已知实数x、y满足$x^2+y^2=4$，求$x-y$的最大值.

【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】因为$x^2+y^2=4$，则根据圆的标准方程知$-2\le x\le 2$，

所以$\left(x-y\right)^2=x^2+y^2-2xy\le 2\left(x^2+y^2\right)=8$，

当且仅当$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$时，取等号，此时$\left(x-y\right)^2$有最大值为8.

所以当$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$时，$x-y$的最大值为$2\sqrt{2}$.

6．（2023秋·重庆·高二校联考期末）已知圆心为C的圆经过点$A\left(1,1\right)$和$B\left(2,-2\right)$，且圆心C在直线l：$x-y+1=0$上.

(1)求圆心为C的圆的一般方程；

(2)已知$P\left(2,1\right)$，Q为圆C上的点，求$|PQ|$的最大值和最小值.

【答案】(1) $x^2+6x+y^2+4y-12=0$；

(2)最大值为 $\sqrt{34}+5$，最小值为 $\sqrt{34}-5$.

（2）先确定点 P 在圆 C 外，求得 $|PC|$ 可求 $|PQ|$ 的最大值和最小值.

【详解】（1）$\because A(1,1)$，$B(2,-2)$，$\therefore k_{AB}=\dfrac{1-(-2)}{1-2}=-3$，

$\therefore$弦 AB 的垂直平分线的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，

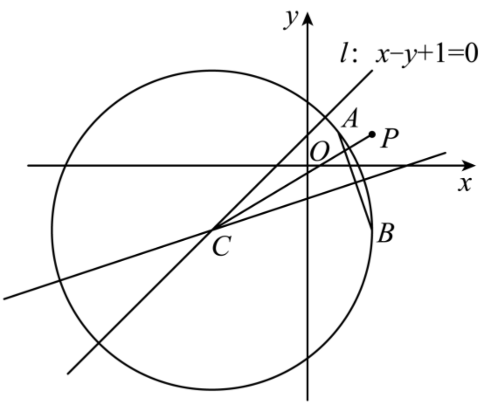
又弦 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore$弦 AB 的垂直平分线的方程为 $y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，即 $x-3y-3=0$，

与直线 l：$x-y+1=0$ 联立，解得：$x=-3,y=-2$，

$\therefore$ 圆心 C 坐标为 $(-3,-2)$，$\therefore$圆的半径 $r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$，

则圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

$\therefore$圆 C 的一般方程为 $x^2+6x+y^2+4y-12=0$；



（2）由（1）知圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$，

所以 $|PC|=\sqrt{(2+3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}$，$\therefore P(2,1)$ 在圆 C 外，

$\therefore |PQ|$ 的最大值为 $\sqrt{34}+5$，最小值为 $\sqrt{34}-5$.

高频考点三：轨迹方程

1．（2023 秋·河南·高三校联考阶段练习）已知圆 $M:(x-2)^2+y^2=4$，过点 $N(1,0)$ 的直线 l 与圆 M 交于 A,B 两点，D 是 AB 的中点，则 D 点的轨迹方程为______.

【答案】$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

【详解】圆 $M:(x-2)^2+y^2=4$，所以圆心为 $M(2,0)$，半径为 2，设 $D(x,y)$，

由线段 AB 的中点为 D，可得 $MD\perp DN$，即有 $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ND}=(x-2,y)\cdot(x-1,y)=(x-2)(x-1)+y\cdot y=0$，

即$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，所以点$D$的轨迹方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

2．（2023秋·高二课时练习）已知圆的方程是$x^2+y^2-2ax+2(a-2)y+2=0$，则圆心的轨迹方程为______.

【答案】$x+y-2=0(x\neq 1)$

【详解】因为方程$x^2+y^2-2ax+2(a-2)y+2=0$表示圆，

即$(x-a)^2+(y+a-2)^2=a^2+(a-2)^2-2$表示圆,所以$a^2+(a-2)^2-2>0$，

解得$a\neq 1$,

易知圆心坐标为$(a,2-a)$，且$a\neq 1$，

设圆心坐标为(x,y)，则有$\begin{cases}x=a\\y=2-a\end{cases}$，

消去a，得$x+y-2=0(x\neq 1)$即为所求圆心的轨迹方程.

故答案为：$x+y-2=0(x\neq 1)$

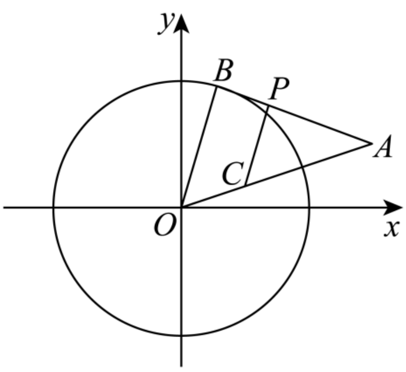
3．（2023秋·高二课时练习）已知定点$A(3,1)$，动点B在圆$x^2+y^2=4$上，点P在线段AB上，且$|BP|:|PA|=1:2$，求点P的轨迹方程.

【答案】$(x-1)^2+(y-\frac{1}{3})^2=\frac{16}{9}$

【详解】在OA上找一点$C(1,\frac{1}{3})$，则$|AC|=2|OC|$，

过C作$CP // OB$交AB于P，此时满足$|PA|=2|BP|$，如下图，

所以$|CP|=\frac{2}{3}|OB|=\frac{4}{3}$，令$P(x,y)$，则$(x-1)^2+(y-\frac{1}{3})^2=\frac{16}{9}$.



4．（2023秋·高二课时练习）$\triangle ABC$的顶点B，C的坐标分别是$(-3,-1)$，$(2,1)$，顶点A在圆$x^2+y^2+4x-8y+16=0$上运动，求$\triangle ABC$的重心G的轨迹方程.

【答案】$(x+1)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

【详解】设$\triangle ABC$的重心G的坐标是(x,y)，点A的坐标是(x_0,y_0).

已知点B，C的坐标分别是$(-3,-1)$，$(2,1)$，

则$\triangle ABC$的重心G的坐标满足$x=\dfrac{(-3)+2+x_0}{3}$，$y=\dfrac{(-1)+1+y_0}{3}$.

因此有$x_0=3x+1$，$y_0=3y$.①

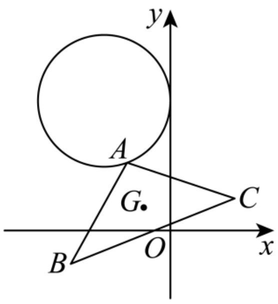
因为点A在圆$x^2+y^2+4x-8y+16=0$上运动，

所以点A的坐标(x_0,y_0)满足方程$x^2+y^2+4x-8y+16=0$，

即满足方程$(x+2)^2+(y-4)^2=4$.②

将①代入②，得$(3x+1+2)^2+(3y-4)^2=4$.

即所求轨迹方程为$(x+1)^2+\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.



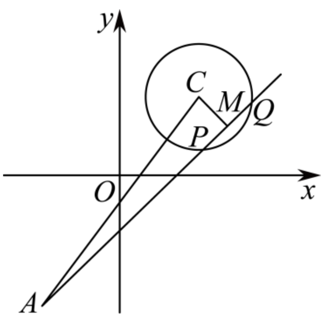
5．（2023秋·高二课时练习）从定点$A(-3,-5)$向圆$C:x^2+y^2-6x-6y+14=0$任意引一割线交圆于P，Q两点，求弦PQ的中点M的轨迹方程.

【答案】$x^2+(y+1)^2=25$（在圆C内部的部分）

【详解】设所求轨迹上任一点$M(x,y)$，

圆C的方程可化为$(x-3)^2+(y-3)^2=4$,

则圆心坐标为$C(3,3)$，$|AC|=\sqrt{(-3-3)^2+(-5-3)^2}=10$，



因为$CM\perp AM$，所以点M的轨迹是以AC为直径的圆（在圆C内部的部分），

因为AC的中点坐标为$(0,-1)$，

所以点M的轨迹方程为$x^2+(y+1)^2=25$（在圆C内部的部分）.

高频考点四：直线与圆相交的弦长问题

1．（2023 秋·重庆沙坪坝·高二重庆八中校考阶段练习）直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 M、N 两点，若 $\left|\overrightarrow{MN}\right|=2\sqrt{3}$，则 k 等于（　）

A．0　　　　B．$-\frac{2}{3}$　　　　C．$-\frac{2}{3}$ 或 0　　　　D．$-\frac{3}{4}$ 或 0

【答案】D

【详解】由题意，

$\because \left|\overrightarrow{MN}\right|=2\sqrt{3}$，

$\therefore MN$ 到圆心的距离为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

∴圆心 $(3,2)$ 到直线 $y=kx+3$ 的距离为：

$\frac{|3k+3-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $9k^2+6k+1=k^2+1$.

解得：$k=0$ 或 $-\frac{3}{4}$，

故选：D.

2．（2023 春·重庆沙坪坝·高三重庆一中校考阶段练习）圆 $C:x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 被过点 $P(0,0)$ 的直线截得的最短弦长为（　）

A．2　　　　B．4　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】C

【详解】圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=4$，圆心 $C(1,-1)$，半径 $r=2$

所以 $|PC|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}<2$，故点 $P(0,0)$ 在圆 C 内，

则当直线垂直于过 C，P 的直径时，

最短弦长 $=2\sqrt{r^2-CP^2}=2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

故选：C.

3．（2023 秋·江苏·高二南京市人民中学校联考开学考试）圆 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 与直线 $x+2y-5=0$ 相交于 P_1，P_2 两点，则 $|P_1P_2|=$______.

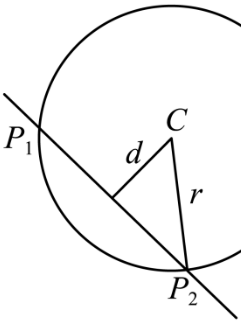
【答案】$2\sqrt{5}$

【详解】圆 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 的标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$，

则圆心为 $(2,-1)$，半径为 $r=\sqrt{10}$，

圆心$\left(2,-1\right)$到直线$x+2y-5=0$的距离为$d=\dfrac{|2-2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，

如图所示，



则由垂径定理可知，$|P_1P_2|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=2\sqrt{5}$．

故答案为：$2\sqrt{5}$．

4．（2023·全国·高二课堂例题）已知直线$l:3x+y-6=0$和圆心为C的圆$x^2+v^2-2y-4=0$，判断直线l与圆C的位置关系；如果相交，求直线l被圆C所截得的弦长.

【答案】直线l与圆C相交，$\sqrt{10}$

【详解】解法1：联立直线l与圆C的方程，

得$\begin{cases}3x+y-6=0①\\x^2+y^2-2y-4=0②\end{cases}$，

消去y得$x^2-3x+2=0$，解得$x_1=2$，$x_2=1$，

所以直线l与圆C相交，

把$x_1=2$，$x_2=1$分别代入方程①，得$y_1=0$，$y_2=3$，

所以直线l与圆C的两个交点是$(2,0)$，$(1,3)$．

因此直线l被圆C所截得的弦长为$\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$．

解法2：圆C的方程$x^2+y^2-2y-4=0$可化为$x^2+(y-1)^2=5$，

因此圆心C的坐标为$(0,1)$，半径为$\sqrt{5}$，

圆心$C(0,1)$到直线l的距离$d=\dfrac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}$，

所以直线l与圆C相交，

所以直线l被圆C所截得的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10}$．

5．（2023秋·重庆沙坪坝·高二重庆南开中学校考阶段练习）圆C：$x^2+y^2-2x-8=0$内有一点$P\left(2,2\right)$，过点P作直线l交圆C于A，B两点.

(1)当弦AB最长时，求直线l的方程；

(2)当直线l被圆C截得的弦长为$4\sqrt{2}$时，求l的方程.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/667066160200006061