专题1　一元二次方程根与系数的关系

角度1　已知一根,求另一根及字母系数

【解答思路】

方法一:先利用根与系数的关系求出另一根,再根据方程的两根及根与系数的关系求出字母系数.

方法二:先把已知根代入方程,求出字母系数,再解方程求出另一根.

【针对训练】

1.若$x=-1$是方程$x^2-3x+k+1=0$的一个根,则此方程的另一个根是(**D**)

A.-5　　B.0

C.3　　D.4

2.(2022·青海)已知关于x的方程$x^2+mx+3=0$的一个根为$x=1$,则实数m的值为(**B**)

A.4　　B.-4

C.3　　D.-3

3.(2023·怀化)已知关于x的一元二次方程$x^2+mx-2=0$的一个根为-1,则m的值为

__**-1**__,另一个根为__**2**__.

角度2　求关于两根代数式的值

【解答思路】

常用五种“变形”

(1)$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;

(2)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$;

(3)$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$;

(4)$(x_1+a)(x_2+a)=x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2$;

(5)$x_1x_2^2+x_1^2x_2=x_1x_2(x_1+x_2)$.

【针对训练】

4.已知a,b是方程$x^2+x-3=0$的两个实数根,则$a^2-b+2\ 019$的值是(**A**)

A.2 023　　B.2 021

C.2 020　　D.2 019

5.已知x_1,x_2是方程$x^2-x-2\ 023=0$的两个实数根,则代数式$x_1^3-2\ 023x_1+x_2^2$的值是(**A**)

A.4 047　　B.4 045

C.2 023　　D.1

6.(2023·内江)已知a,b是方程$x^2+3x-4=0$的两根,则$a^2+4a+b-3=$ **-2** .

7.(2023·鄂州)若实数a,b分别满足$a^2-3a+2=0,b^2-3b+2=0$,且$a\neq b$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ $\frac{3}{2}$.

8.(2024·内江)已知关于x的一元二次方程$x^2-px+1=0$(p为常数)有两个不相等的实数根x_1和x_2.

(1)填空:$x_1+x_2=$____________,$x_1x_2=$____________;

(2)求$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,$x_1+\frac{1}{x_1}$;

(3)已知$x_1^2+x_2^2=2p+1$,求p的值.

【解析】(1)由根与系数的关系得:$x_1+x_2=p$,$x_1x_2=1$,

答案:p　1

(2) $\because x_1+x_2=p, x_1x_2=1$,

$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{p}{1}=p$;

$\because$ 关于x的一元二次方程$x^2-px+1=0$(p为常数)有两个不相等的实数根x_1和x_2,

$\therefore x_1^2-px_1+1=0$,

$\therefore x_1-p+\frac{1}{x_1}=0$,即$x_1+\frac{1}{x_1}=p$;

(3)由根与系数的关系得:$x_1+x_2=p$,$x_1x_2=1$,

$\because x_1^2+x_2^2=2p+1$,$\therefore (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2p+1$,$\therefore p^2-2=2p+1$,解得:$p_1=3$,$p_2=-1$,

当$p=3$时,$\Delta=p^2-4=9-4=5>0$;

当$p=-1$时,$\Delta=p^2-4=-3<0$;

$\therefore p=3$.

9.先化简再求值:$\left(\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}+\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}\right)\div\frac{1+b}{ab}$,其中$a,b$是一元二次方程$x^2-(\sqrt{5}+1)x+2=0$的两个根.

【解析】原式$=\left[\frac{a+b}{(a+b)^2}+\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}\right]\div\frac{1+b}{ab}=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)\cdot\frac{ab}{1+b}=\frac{1+b}{a+b}\cdot\frac{ab}{1+b}=\frac{ab}{a+b}$,

∵ a,b**是一元二次方程**$x^2-(\sqrt{5}+1)x+2=0$**的两个根,**

∴ $a+b=\sqrt{5}+1,ab=2$,

∴原式$=\frac{ab}{a+b}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

角度3 确定方程中待定字母的值或范围

【解答思路】

一元二次方程根与系数的关系常与根的判别式相结合,一般按下面方法解题:

1. 一元二次方程根的情况

$\Big\downarrow$ 结合根的判别式

列出方程或不等式

$\Big\downarrow$

确定字母的值或取值范围

2. 方程的根满足的条件

$\Big\downarrow$ 结合根与系数的关系

列出方程或不等式

$\Big\downarrow$

确定字母的值或取值范围