第 03 节　等比数列及其前 n 项和

【考纲解读】

考　点	考纲内容	五年统计	分析预测
等比数列的概念与运算	1. 理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式； 2. 了解等比数列与指数函数的关系.	2013 浙江文 19；理 18； 2014 浙江理 19； 2015 浙江文 10,17；理 3； 2016 浙江文 17.	1. 高频考向:利用方程思想应用等比数列通项公式、前 n 项和公式求基本量； 2. 低频考向:等比数列的性质及应用. 3. 特别关注: （1）与等差数列的综合问题； （2）根据已知递推式构造等比数列求解相关问题.
等比数列前 n 项和及应用	1. 掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式及其应用； 2. 会用数列的等比关系解决实际问题.	2016 浙江文 17.	

【知识清单】

一．等比数列的有关概念

1．等比数列定义

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比；公比通常用字母 q 表示 $(q\neq 0)$，即：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$，（注意：“从第二项起”、“常数”$q$、等比数列的公比和项都不为零）

2．等比数列通项公式为：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq 0)$.

说明：（1）由等比数列的通项公式可以知道：当公比 $d=1$ 时该数列既是等比数列也是等差数列；（2）等比数列的通项公式知：若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则

$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$.

3．等比中项

如果在a与b中间插入一个数G，使a,G,b成等比数列，那么G叫做a与b的等比中项（两个符号相同的非零实数，都有两个等比中项）

4．等比数列前n项和公式

一般地，设等比数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$的前 n 项和是$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，当$q\neq 1$时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$或$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$；当$q=1$时，$S_n=na_1$（错位相减法）．

说明：(1)（1）a_1,q,n,S_n和a_1,a_n,q,S_n各已知三个可求第四个；(2)注意求和公式中是q^n，通项公式中是q^{n-1}不要混淆；(3)应用求和公式时$q\neq 1$，必要时应讨论$q=1$的情况．

5. 等差数列与等比数列的区分与联系

(1)如果数列$\{a_n\}$成等差数列，那么数列$\left\{A^{a_n}\right\}$(A^{a_n}总有意义)必成等比数列．

(2)如果数列$\{a_n\}$成等比数列，且$a_n>0$，那么数列$\{\log_a a_n\}$（$a>0$，且$a\neq 1$）必成等差数列．

(3)如果数列$\{a_n\}$既成等差数列又成等比数列，那么数列$\{a_n\}$是非零常数数列．数列$\{a_n\}$是常数数列仅是数列既成等差数列又成等比数列的必要非充分条件．

(4)如果由一个等差数列与一个等比数列的公共项顺次组成新数列，那么常选用“由特殊到一般”的方法进行讨论，且以等比数列的项为主，探求等比数列中哪些项是它们的公共项，构成什么样的新数列．

对点练习：

【2017 届浙江省杭州高级中学高三 2 月模拟】已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，对任意正整数n，$a_{n+1}=3S_n$，则下列关于$\left\{a_n\right\}$的论断中正确的是（ ）

A. 一定是等差数列　　B. 一定是等比数列

C. 可能是等差数列，但不会是等比数列　　D. 可能是等比数列，但不会是等差数列

【答案】C

【解析】∵$a_{n+1}=3S_n$，

∴$S_{n+1}-S_n=3S_n$，

∴$S_{n+1}=4S_n$，

若 $S_1=0$，则数列$\{a_n\}$为等差数列；

若 $S_1\neq0$，则数列$\{S_n\}$为首项为 S_1，公比为 4 的等比数列，∴$S_n=S_1\cdot4^{n-1}$，

此时 $a_n=S_n-S_{n-1}=3S_1\cdot4^{n-2}(n\geqslant2)$，即数列从第二项起，后面的项组成等比数列。

综上，数列$\{a_n\}$可能为等差数列，但不会为等比数列。

本题选择 C 选项.

二．等比数列的相关性质

1.等比数列的性质：

（1）在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，从第 2 项起，每一项是它相邻二项的等比中项；

（2）在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，相隔等距离的项组成的数列是等比数列， 如：

a_1，a_3，a_5，a_7，……；a_3，a_8，a_{13}，a_{18}，……；

（3）在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，对任意m，$n\in N_+$，$a_n=a_mq^{n-m}$；

（4）在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，若m，n，p，$q\in N_+$且$m+n=p+q$，则

$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$，特殊地，$2m=p+q$时，则$a_m{}^2=a_p\cdot a_q$，$a_m$是$a_p$、$a_q$的等比中项.

也就是：$a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=a_3\cdot a_{n-2}=\cdots$，如图所示：$\overbrace{a_1,\underbrace{a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}}_{a_2\cdot a_{n-1}},a_n}^{a_1\cdot a_n}$.

（5）若数列$\{a_n\}$是等比数列，且公比不为－1，S_n是其前n项的和，$k\in N^*$，

那么S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等比数列.

如下图所示：

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+\cdots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}.$$

（6）两个等比数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的积、商、倒数的数列$\{a_n\cdot b_n\}$、$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$、$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$

仍为等比数列.

（7）若数列$\{a_n\}$是等比数列,则$\{ka_n\}$，$\{a^2{}_n\}$仍为等比数列.

2. 公比不为 1 的等比数列，其相邻两项的差也依次成等比数列，且公比不变，即a_2-a_1，a_3-a_2，a_4-a_3，…成等比数列，且公比为$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\frac{(a_2-a_1)q}{a_2-a_1}=q$.

3. 等比数列的单调性

当$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}$时，$\{a_n\}$为递增数列，当$\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}$时，$\{a_n\}$为递减数列.

4. 等差数列和等比数列比较

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n$＝常数	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$＝常数
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq 0)$
判定方法	(1)定义法； (2)中项公式法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\,(n\in N*)\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为等差数列； (3)通项公式法：$a_n=pn+q$ (p,q为常数，$n\in N*$)$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为等差数列； (4)前 n 项和公式法：$S_n=An^2+Bn$ (A,B为常数，$n\in N*$)$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为等差数列； (5) $\{a_n\}$为等比数列，且$a_n>0$，那么数列$\{\log_a a_n\}$ ($a>0$，且$a\neq 1$)为等差数列	(1)定义法 (2)中项公式法：$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$ $(n\in N*)$ （$a_n\neq 0$）$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为等比数列 (3)通项公式法：$a_n=cq^n$ （c,q均是不为 0 的常数，$n\in N*$）$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为等比数列 (4) $\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow\{A^{a_n}\}$ (A^{a_n}总有意义)为等比数列

性质	(1)若 m，n，p，$q\in N_+$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ (2) $a_n=a_m+(n-m)d$ (3) $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$，…仍成等差数列	(1)若 m，n，p，$q\in N_+$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m \cdot a_n=a_p \cdot a_q$ (2) $a_n=a_mq^{n-m}$ (3)等比数列依次每 n 项和（$S_n\neq 0$），即 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$，…仍成等比数列
前 n 项和	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}$	$q=1$ 时，$S_n=na_1$；当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

对点练习：

1.【2016 天津理 5】设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列，公比为 q，则“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的（　　）.

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件　　C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】由题意得，$a_{2n-1}+a_{2n}<0\Leftrightarrow a_1\left(q^{2n-2}+q^{2n-1}\right)<0\Leftrightarrow q^{2(n-1)}(q+1)<0\Leftrightarrow q\in(-\infty,-1)$.

由 $(-\infty,-1)\subseteq(-\infty,0)$，故是必要不充分条件.故选 C.

2.【2017 届浙江省湖州、衢州、丽水三市高三 4 月联考】已知等差数列 $\{a_n\}$，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q\left(n,q\in N^*\right)$，设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n. 若 $T_{2n}+1=S_{q^n}$，则 a_n __________.

【答案】$a_n=2n-1$

【解析】$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

$T_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$，

因为$T_{2n}+1=S_{q^n}$，所以$\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^{2n}+1=\frac{d}{2}q^{2n}+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)q^n$，这是关于$n$的恒等式，所以$\begin{cases}\frac{b_1}{1-q}+1=0\\ a_1-\frac{d}{2}=0\\ -\frac{b_1}{1-q}=\frac{d}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=2\\ a_1=1\end{cases}$

【考点深度剖析】

等比数列也是高考的常考内容，以等比数列的基本公式及基本运算为基础，可考查单一的等比数列问题，但更倾向于与等差数列或其他内容相结合的问题，其中涉及到方程的思想、等价转化的思想、分类讨论的思想等．从思维品质上看更讲究思维的灵活性及深刻性．

【重点难点突破】

考点 1　等比数列的定义，通项公式，前n项和的基本运算

【1-1】【2017 全国卷 3 理】设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=-1$，　$a_1-a_3=-3$，则$a_4=$ ___________．

【答案】-8

【解析】因为$\{a_n\}$为等比数列，设公比为q．

$\begin{cases}a_1+a_2=-1\\ a_1-a_3=-3\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+a_1q=-1 ①\\ a_1-a_1q^2=-3 ②\end{cases}$，

显然$q\neq1$，$a_1\neq0$，$\frac{②}{①}$得$1-q=3$，即$q=-2$，代入①式可得$a_1=1$，

所以$a_4=a_1q^3=1\times(-2)^3=-8$．

【1-2】【2017 全国卷 2 理】我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯（　　）．

A．1 盏　　　　　B．3 盏　　　　　C．5 盏

D．9 盏

【答案】B

【解析】设顶层灯数为 a_1， $q=2$， $S_7=\frac{a_1\left(1-2^7\right)}{1-2}=381$，解得 $a_1=3$．故选 B.

【1-3】【辽宁省凌源二中 2018 届高三三校联考理】已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_2a_3a_4=-a_7^2=-64$，则 $\tan\left(\frac{a_4a_6}{3}\cdot\pi\right)=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】由等比数列的性质可得： $a_2a_3a_4=a_3^3=-64,\therefore a_3=-4$，

$a_7=a_3q^4<0$，结合 $a_7^2=64$ 可得： $a_7=-8$，

结合等比数列的性质可得： $a_4a_6=a_3a_7=32$，

即： $\tan\left(\frac{a_4a_6}{3}\cdot\pi\right)=\tan\left(\frac{32}{3}\pi\right)=\tan\left(10\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$.

本题选择 B 选项.

【领悟技法】

1. 等比数列的判定方法

(1)定义法：对于数列 $\{a_n\}$，若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2)等比中项：对于数列 $\{a_n\}$，若 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(3)通项公式法　$a_n=cq^n$（c,q 均是不为 0 的常数，$n\in N*$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是等比数列.

2. 求解等比数列的基本量常用的思想方法

(1)方程的思想: 在解有关等比数列的问题时可以考虑化归为 a_1 和 q 等基本量，通过建立方程(组)获得解．即等比数列的通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ 及前 n 项和公式

$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$或$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$，共涉及五个量$a_1,q,n,a_n,S_n$，知其中三个就能求另外两个,即知三求二，多利用方程组的思想，体现了用方程的思想解决问题，注意要弄准它们的值.运用方程的思想解等比数列是常见题型，解决此类问题需要抓住基本量a_1、q，掌握好设未知数、列出方程、解方程三个环节，常通过“设而不求，整体代入”来简化运算.

(2)分类讨论思想:在应用等比数列前n项和公式时，必须分类求和，当$q=1$时，$S_n=na_1$；当$q\neq1$时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；在判断等比数列单调性时,也必须对$a_1$与$q$分类讨论.

3. 特殊设法:三个数成等比数列，一般设为$\dfrac{a}{q},a,aq$；四个数成等比数列，一般设为$\dfrac{a}{q^3},\dfrac{a}{q},aq,aq^3$.

这对已知几数之积,求数列各项,运算很方便.

4. 等比数列的前n项和公式

若已知首项a_1和末项a_n，则$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$，或等比数列$\{a_n\}$的首项是$a_1$，公比是$q$，则其前$n$项和公式为$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

5. 若证明某数列不是等比数列，则只要证明存在连续三项不成等比数列即可.

【触类旁通】

【变式一】【2018届湖北省武汉市部分学校新高三起点考试】已知等比数列$\{a_n\}$中，$3a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列，设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则$\dfrac{S_3}{a_3}$等于（　）

A. $\dfrac{13}{9}$　B. 3或$\dfrac{13}{9}$　C. 3　D. $\dfrac{7}{9}$

【答案】B

【解析】因为$3a_2$， $2a_3$， a_4成等比数列， $3a_2+a_4=4a_3$, $\therefore 3a_1q+a_1q^3=4a_1q^2$，整理可得，

$q^2-4q+3=0$,， $\therefore q=1$或$q=3$，当$q=1$时，则$\frac{S_3}{a_3}=\frac{a_3}{a_3}=3$，当$q=3$时，则$\frac{S_3}{a_3}=\frac{13a_1}{9a_1}=\frac{13}{9}$，故选

B.

【变式二】【2017 北京卷理】若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=-1$，

$a_4=b_4=8$，则$\frac{a_2}{a_1}=$________.

【答案】1

【解析】由$a_1=-1$，$a_4=8$，则$a_2=a_1+d=-1+3=2$，由$b_1=-1$，$b_4=8$，则

$q=-2$，则$b_2=b_1q=2$. 故$\frac{a_2}{b_2}=\frac{2}{2}=1$.

考点 2　等比数列的性质

【2-1】【2018 届河南省中原名校高三第三次质评】设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前

n项和且$S_n=3^{n+1}-A$，则$A=$（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

【答案】D

【解析】根据等比数列$\{a_n\}$的前n项和公式知 $s_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_1}{q-1}\cdot q^n-\frac{a_1}{q-1}$

（$q\neq 1$），又$S_n=3^{n+1}-A=3\cdot 3^n-A$，所以$\frac{a_1}{q-1}=3$， $A=\frac{a_1}{q-1}=3$，故选 D.

【2-2】【2018 届四川省双流中学高三 9 月月考】各项为正数的等比数列$\{a_n\}$

中， a_2与a_{10}的等比中项为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\log_3 a_4+\log_3 a_8=$__________.

【答案】-1

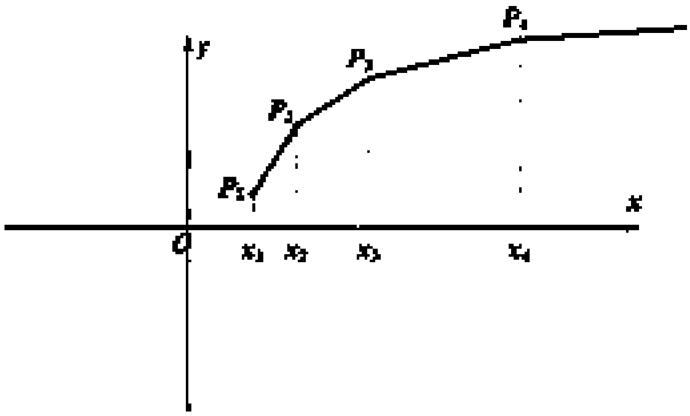
【解析】由题设$a_2a_{10}=\frac{1}{3}$，又因为$a_2a_{10}=a_4a_8$，所以

$\log_3 a_4+\log_3 a_8=\log_3(a_4a_8)=\log_3\frac{1}{3}=-1$，应填答案$-1$.

【2-3】【2017 山东卷理】已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$，

（1）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（2）如图所示，在平面直角坐标系xOy中，依次连接点$P_1(x_1,1)$，$P_2(x_2,2)\cdots P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$得到折线$P_1P_2\ldots P_{n+1}$，求由该折线与直线$y=0$，$x=x_1$，$x=x_{n+1}$所围成的区域的面积$T_n$.



【答案】（1）$x_n=2^{n-1}$.

（2）$T_n=\dfrac{(2n-1)\times 2^n+1}{2}$.

【解析】（1）设数列$\{x_n\}$的公比为q，由已知$q>0$.

由题意得$\begin{cases} x_1+x_1q=3 \\ x_1q^2-x_1q=2 \end{cases}$，所以$3q^2-5q-2=0$，

因为$q>0$，所以$q=2, x_1=1$，因此数列$\{x_n\}$的通项公式为$x_n=2^{n-1}$.

（2）过$P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots P_{n+1}$向$x$轴作垂线，垂足分别为$Q_1,Q_2,Q_3,\cdots\cdots Q_{n+1}$，

由（1）得$x_{n+1}-x_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

记梯形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为b_n.

由题意$b_n=\dfrac{(n+n+1)}{2}\times 2^{n-1}=(2n+1)\times 2^{n-2}$，

所以

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=3\times 2^{-1}+5\times 2^0+7\times 2^1+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-3}+(2n+1)\times 2^{n-2}$ ①

又$2T_n=3\times 2^0+5\times 2^1+7\times 2^2+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-2}+(2n+1)\times 2^{n-1}$

②

①－②得

$-T_n=3\times 2^{-1}+(2+2^2+......+2^{n-1})-(2n+1)\times 2^{n-1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n-1}.$

所以$T_n=\dfrac{(2n-1)\times 2^n+1}{2}.$

【领悟技法】

1. 等比数列的性质是等比数列的定义、通项公式以及前n项和公式等基础知识的推广与变形，熟练掌握和灵活应用这些性质可以有效、方便、快捷地解决许多等比数列问题.

2. 等比数列的性质多与其下标有关，解题需多注意观察，发现其联系，加以应用，故应用等比数列的性质解答问题的关键是寻找项的序号之间的关系.

3. 应用等比数列的性质要注意结合其通项公式、前n项和公式.

4. 在运用函数判断数列的单调性时，要注意函数的自变量为连续的，数列的自变量为不连续的，所以函数性质不能够完全等同于数列的性质．有些数列会出现前后几项的大小不一，从某一项开始才符合递增或递减的特征，这时前几项中每一项都必须研究.

【触类旁通】

【变式一】【2018届江苏省泰州中学高三上开学】设正项等比数列$\{a_n\}$满足$2a_5=a_3-a_4$，若存在两项a_n, a_m，使得$a_1=4\sqrt{a_n\cdot a_m}$，则$m+n$的值为__________.

【答案】6

【解析】正项等比数列$\{a_n\}$满足$2a_5=a_3-a_4$，则$2a_3q^2=a_3(1-q)$，

可得$2q^2+q-1=0,q>1$，解得$q=\frac{1}{2}$，

若存在两项a_n,a_m，使得$a_1=4\sqrt{a_n\cdot a_m}$，可得$a_1=4\sqrt{a_1^2\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2}}$，

$\therefore n+m=6$.

故答案为 6.

【变式二】【2017 届重庆市第一中学高三下第二次月考】已知曲线C_1的方程为$x^2+y^2=1$，过平面上一点P_1作C_1的两条切线，切点分别为A_1,B_1，且满足$\angle A_1P_1B_1=\frac{\pi}{3}$，记$P_1$的轨迹为$C_2$，过一点$P_2$作$C_2$的两条切线，切点分别为$A_2$、$B_2$满足$\angle A_2P_2B_2=\frac{\pi}{3}$，记$P_2$的轨迹为$C_3$，按上述规律一直进行下去……，记$a_n=|A_nA_{n+1}|_{\max}$且$S_n$为数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和，则满足$\left|S_n-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{100}$的最小的$n$是____________。

【答案】7

【解析】由题设可知轨迹$C_1,C_2,C_3,\cdots,C_n$分别是半径为$1,2,4,8,16,32,\cdots,2^n$的圆，故由题设$a_1=1+2=3,a_2=2+4=6,a_3=4+8=12,a_4=8+16=24,\cdots,a_n=2^{n-1}+2^n=3\cdot2^{n-1}$，则

$S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，所以$\left|S_n-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}<\frac{1}{100}$，即$3\cdot2^{n-1}>100$，故最小的正整数$n=7$，应填答案$7$。

考点 3　等差数列与等比数列的综合应用

【3-1】【2018 届浙江省温州市高三 9 月一模】已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$b_n=2^{a_n}$，数列$\{b_n\}$的前n项，前2n项，前3n项的和分别为A，B，C，则（　　）

A. $A+B=C$　　B. $B^2=AC$　　C. $(A+B)-C=B^2$　　D. $(B-A)^2=A(C-B)$

【答案】D

【解析】∵$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，∴$\{b_n\}$是以公比不为1的等比数列，由等比数列的性质，可得A,B−A,C−B成等比数列，∴可得$(B-A)^2=A(C-B)$，故选D.

【3-2】【2018届广东省广州市海珠区高三综合测试一】已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1,a_3,a_4成等比数列，则$\{a_n\}$前6项的和为（　　）

A. -20　　B. -18　　C. -16　　D. -14

【答案】B

【解析】等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1,a_3,a_4成等比数列，则$a_3^2=a_1a_4$，即$(a_1+4)^2=a_1(a_1+6)$，解得$a_1=-8$，　$S_6=6\times(-8)+\frac{6\times5}{2}\times2=-18$　，故选B.

【3-3】【2018届浙江省“七彩阳光”联盟高三上期初联考】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，　$a_{n+1}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{2^n}{a_n}$，数列$\{b_n\}$的前n项的和为S_n，试求数列$\{S_{2n}-S_n\}$的最小值；

（3）求证：当$n\geq2$时，　$S_{2^n}\geq\frac{7n+11}{12}$.

【答案】（1）$a_n=n\cdot2^n$（2）$\frac{1}{2}$（3）见解析

【解析】试题分析：（1）构造新数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$，则由已知化简可得新数列为首项为2，公比为2的等比数列，即得$\frac{a_n}{n}=2^n$，所以$a_n=n\cdot2^n$（2）$b_n=\frac{1}{n}$，　$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，利用相邻两项的差得数列$\{S_{2n}-S_n\}$为单调递增数列，所以最小值为第一项（3）利用（2）中数列分解

$$S_{2^n}=\left(S_{2^n}-S_{2^{n-1}}\right)+\left(S_{2^{n-1}}-S_{2^{n-2}}\right)+\cdots+\left(S_2-S_1\right)+S_1\geq(n-1)\left(S_4-S_2\right)+\left(S_2-S_1\right)+S_1=\frac{7n+11}{12}$$

.

试题解析：解：（1）由条件$a_{n+1}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\frac{a_n}{n}$，又$a_1=2$，所以

$\frac{a_1}{1}=2$，因此数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$构成首项为 2，公比为 2 的等比数列，从而

$\frac{a_n}{n}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，因此，　$a_n=n\cdot 2^n$．

（2）由（1）得$b_n=\frac{1}{n}$，设$c_n=S_{2n}-S_n$，则$c_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

所以$c_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$，

从而$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=0$，

因此数列$\{c_n\}$是单调递增的，所以$(c_n)_{\min}=c_1=\frac{1}{2}$．

（3）当$n\geq 2$时，　$S_{2^n}=\left(S_{2^n}-S_{2^{n-1}}\right)+\left(S_{2^{n-1}}-S_{2^{n-2}}\right)+\cdots+\left(S_2-S_1\right)+S_1$

$=c_{2^{n-1}}+c_{2^{n-2}}+\cdots+c_2+c_1+S_1$，由（2）知$c_{2^{n-1}}\geq c_{2^{n-2}}\geq\cdots\geq c_2$，又$c_1=\frac{1}{2},S_1=1$，$c_2=\frac{7}{12}$，

所以 $S_{2^n}\geq(n-1)c_2+c_1+S_1=\frac{7}{12}(n-1)+\frac{1}{2}+1=\frac{7n+11}{12}$．

【领悟技法】

1. 等差、等比数列性质很多，在高考中以等差中项和等比中项的考查为主，在应用时，要注意等式两边的项的序号之间的关系．

2. 在等差数列与等比数列的综合问题中，特别要注意它们的区别，避免用错公式．方程思想的应用往往是破题的关键．

3. 解决等差数列与等比数列的综合问题，关键是理清两个数列的关系．如果同一数列中部分项成等差数列，部分项成等比数列，要把成等差数列或等比数列的项抽出来单独研究；如果两个数列通过运算综合在一起，要从分析运算入手，把两个数列分割开，弄清两个数列各自的特征，再进行求解．

4. 等差、等比数列的性质是两种数列基本规律的深刻体现，是解决等差、等比数列问题既快捷又方便的工具，应有意识地去应用．但在应用性质时要注意性质的前提条件，有时需要进行适当变形．

5. 解综合题的成败在于审清题目，弄懂来龙去脉，透过给定信息的表象，抓住问题的本质，揭示问题的内在联系和隐含条件，明确解题方向、形成解题策略．

【触类旁通】