



同济大学土木工程防灾国家重点实验室、桥梁工程系

# 高等结构动力学

## ——之第十讲

### 桥梁车辆振动作用

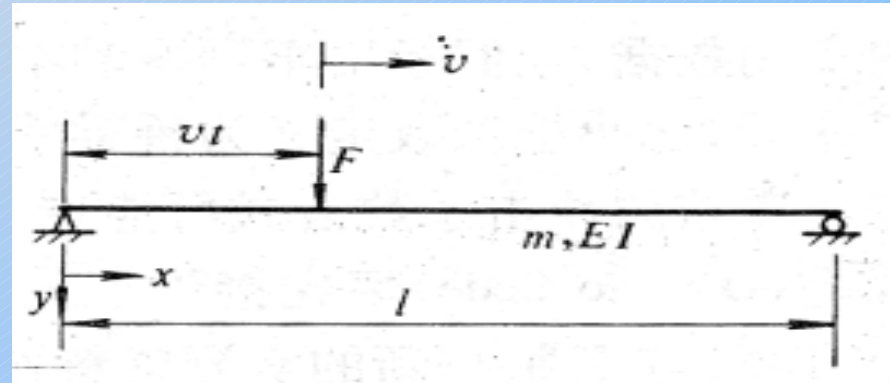
主讲教师：  教授、博士



# 1. 车辆振动简化分析

## 1.1 匀速移动常量力

### 计算图式



➤ 振动方程:  $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x) \delta(t)$

➤ 级数分解:  $y(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n(\phi_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$

➤ 振动响应:  $y(x, t) = \frac{2F}{ml} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left( \sin \Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$   
 $\Omega_n = \frac{n\pi v}{l}$



### 1.1 匀速移动吊重力(续)

取首项级数:

$$y_{\max} = \frac{2 Fl^3}{\pi EI} \frac{1}{4} \frac{1}{1-\alpha} \approx y_{st} \frac{1}{1-\alpha} \alpha$$

$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \alpha = \frac{\Omega_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi v}{l}}{\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}} = \frac{vl \sqrt{m}}{\pi \sqrt{EI}}$$

#### ★ 讨论两种特殊情况:

(1) 移动速度很小 ( $v \rightarrow 0$  或  $\alpha \rightarrow 0$ )

假想轴向压力:  $S = mv^2$

二阶非线性效应:  $\alpha^2 = \frac{S}{S_{cr}} = \frac{mv^2}{\pi^2 EI} l$

(2) 移动速度很大 ( $\alpha^2 \gg 1$  共振)

共振临界速度:  $v_c = \frac{\omega_1 l}{\pi}$  或  $\omega_1 = \frac{\pi v_c}{l}$

最大共振响应:  $\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

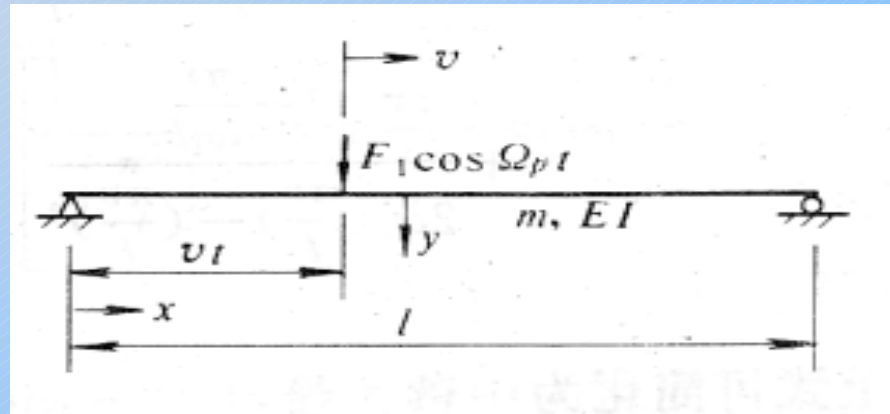
共振发生时刻: 常量力离开梁端瞬时



# 1. 车辆振动简化分析(续)

## 1.2 匀速移动简谐力

计算图式:



➤ 移动荷载:  $F = F_1 \cos \Omega_p t$

➤ 级数解答: 
$$y(x) = \frac{F_1}{ml} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2 \left( \frac{\Omega_p}{\omega_n} + \frac{\Omega_p}{\omega_n} \right)^2} \left[ \sin \left( \frac{\Omega_p}{\omega_n} + \frac{\Omega_p}{\omega_n} \right) \Omega \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Omega_p}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] - \frac{1}{\omega_n^2 \left( \frac{\Omega_p}{\omega_n} - \frac{\Omega_p}{\omega_n} \right)^2} \left[ \sin \left( \frac{\Omega_p}{\omega_n} - \frac{\Omega_p}{\omega_n} \right) \Omega \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Omega_p}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \right\} \frac{n \cdot \pi x}{l}$$



## 1.2 匀速移动简谐力(续)

➤ 取首项级数：
$$y(x) \approx \frac{2F_1}{\omega \eta} \sin \cdot \frac{\pi x}{l} \sin \frac{l}{v}$$

➤ 跨中挠度发生时刻：
$$\sin \omega_1 \frac{l}{v} \quad \text{即} \quad t = \frac{\pi}{4\omega_1}$$

➤ 跨中挠度最大值：
$$y_{\max} = \frac{2F_1}{\omega \eta} \frac{1}{\pi v}$$

➤ 动力放大因子：
$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{\omega_1}{\Omega_1} = \frac{\omega_1 l}{\pi v}$$

➤ 有阻尼振动：
$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{4\xi} \left( 1 - e^{-\xi \omega_1 \frac{l}{v}} \right) \approx \frac{1}{4\xi}$$

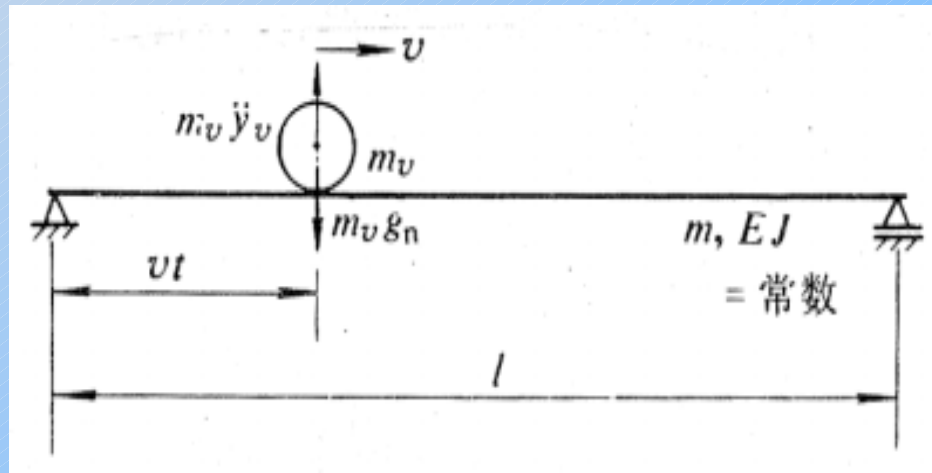
➤ 固定位置放大因子：
$$\frac{y_{\max}}{y_{st}} \approx \frac{1}{2\xi}$$



# 1. 车辆振动简化分析(续)

## 1.3 匀速滚动质量

### 计算图式



➤ 滚动质量荷载:  $F = m_v g - \dot{m}_v \dot{y}_v$

➤ 变系数振动方程:  $y_c \left( \frac{ml}{2} + m_v \sin^2 \frac{\pi vt}{l} \right) = \frac{ml}{2} y_c = m_c \sin \frac{\pi vt}{l}$

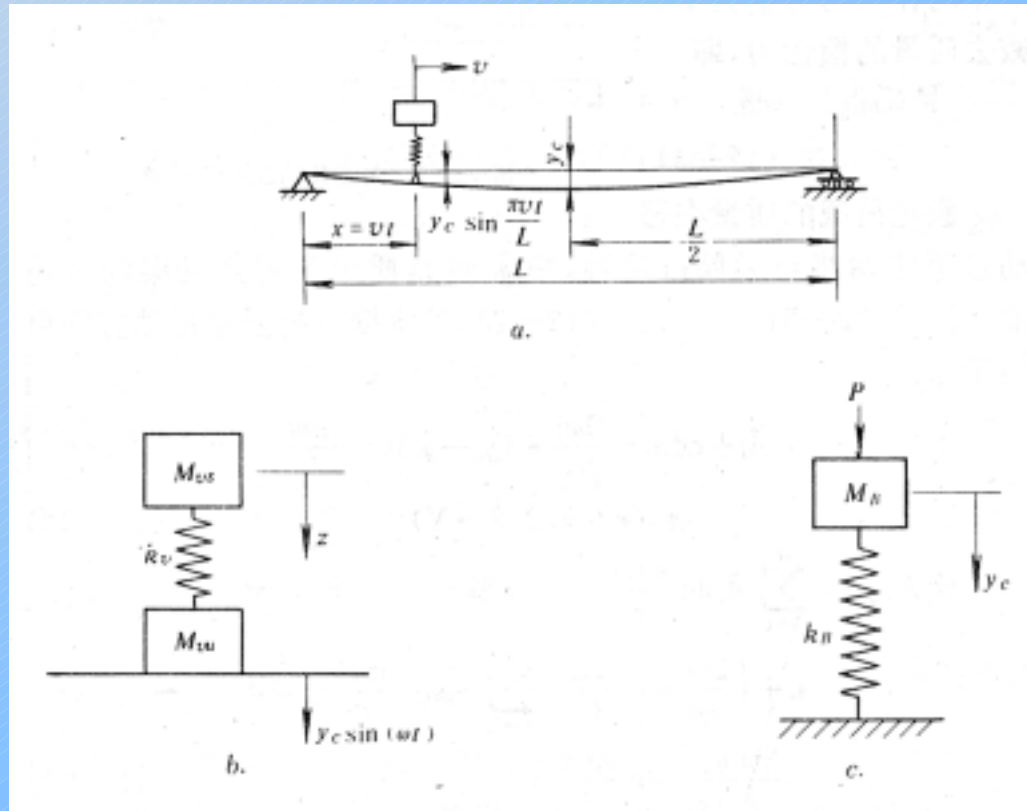
➤ 求解方法: 无解析解, 可求数值解



# 1. 车辆振动简化分析(续)

## 1.4 匀速移动簧上质量

### 计算图式







## 1.4 匀速移动簧上质量(续)

➤ 移动簧上质量荷载  $M$   $y'' + \zeta \dot{y} + [k_v(z - y)_{vs} + \dots] M$

➤ 振动方程组:

$$M \begin{cases} y_B + C \dot{y} + k_B y = M \sin \frac{\pi vt}{l} k \\ M + v_s \dot{z} + \dot{C} + v \theta = \end{cases}$$

$$= y \sin \frac{\pi vt}{l}$$

$$M_v = M_{vs} + v_u M$$

$$M_{\bar{B}} = \frac{1}{2} ml + v_u \sin^2 \frac{\pi vt}{l}$$

Biggs 的理论分析工作

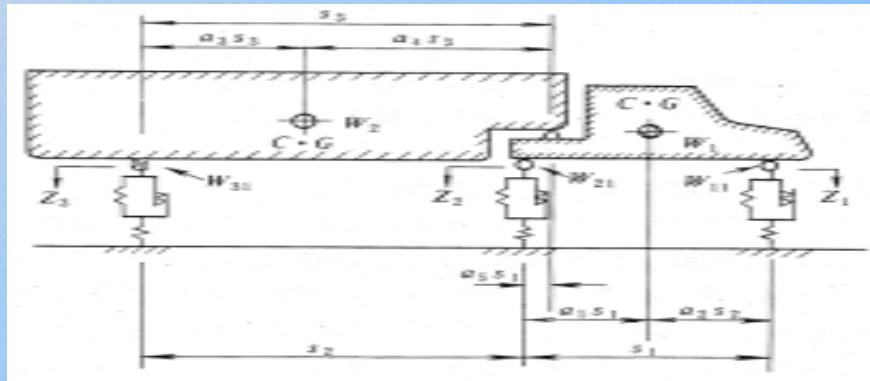




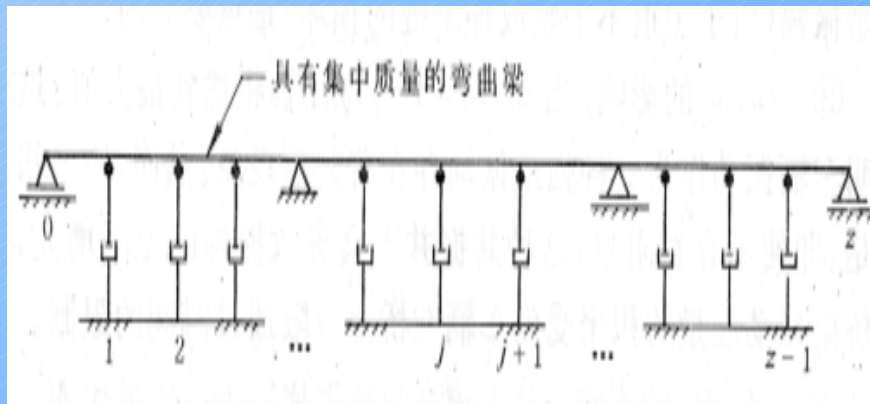
## 2. 车辆振动模态分析法

### 2.1 多轴车辆模型

#### 三轴车辆模型



#### 桥梁理想模型





## 2.1 多轴车辆模型(续)

➤ 质点动力平衡方程(  $r = 2, \dots, 3, \dots, N$  ),

$$m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + \sum_{i=1}^k Q_{ri} - \sum_{j=1}^N R_{rj} = P_r y_r$$

$Q_{ri}$  — 轴单位力引起的 $r$ 节点反力

$R_{rj}$  — 节点单位位移引起的 $r$ 节点反力

➤ 车辆动力平衡方程(  $i = 2, \dots, 3, \dots, k$  ),

$$- \frac{\omega}{g_n} [M] \ddot{z}_i + \{P - s\}_i P_i$$

$z_i$  — 从车辆各轴静力平衡位置起算的位移

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/668026026036006135>