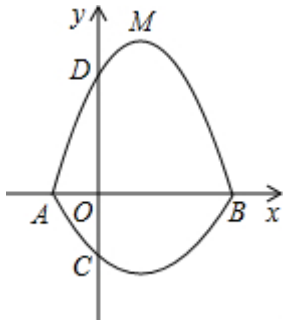


一、二次函数 真题与模拟题分类汇编（难题易错题）

1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， A 、 B 为 x 轴上两点， C 、 D 为 y 轴上的两点，经过点 A 、 C 、 B 的抛物线的一部分 C_1 与经过点 A 、 D 、 B 的抛物线的一部分 C_2 组合成一条封闭曲线，我们把这条封

闭曲线称为“蛋线”. 已知点 C 的坐标为 $(0, -\frac{3}{2})$ ，点 M 是抛物线 C_2 :

$y = mx^2 - 2mx - 3m$ ($m < 0$) 的顶点.



(1) 求 A 、 B 两点的坐标；

(2) “蛋线”在第四象限上是否存在一点 P ，使得 $\triangle PBC$ 的面积最大？若存在，求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值；若不存在，请说明理由；

(3) 当 $\triangle BDM$ 为直角三角形时，求 m 的值.

【答案】(1) $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$.

(2) 存在. $S_{\triangle PBC}$ 最大值为 $\frac{27}{16}$

(3) $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m = -1$ 时， $\triangle BDM$ 为直角三角形.

【解析】

【分析】

(1) 在 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 中令 $y=0$ ，即可得到 A 、 B 两点的坐标.

(2) 先用待定系数法得到抛物线 C_1 的解析式，由 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle POC} + S_{\triangle BOP} - S_{\triangle BOC}$ 得到 $\triangle PBC$ 面积的表达式，根据二次函数最值原理求出最大值.

(3) 先表示出 DM^2 ， BD^2 ， MB^2 ，再分两种情况：① $\angle BMD=90^\circ$ 时；② $\angle BDM=90^\circ$ 时，讨论即可求得 m 的值.

【详解】

解：(1) 令 $y=0$ ，则 $mx^2 - 2mx - 3m = 0$ ，

$\because m < 0$ ， $\therefore x^2 - 2x - 3 = 0$ ，解得： $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$.

$\therefore A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$.

(2) 存在. 理由如下：

$\therefore$ 设抛物线 C_1 的表达式为 $y = a(x+1)(x-3)$ ($a \neq 0$)，

把C(0, $-\frac{3}{2}$) 代入可得, $a = \frac{1}{2}$.

$\therefore C_1$ 的表达式为: $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

设P(p , $\frac{1}{2}p^2 - p - \frac{3}{2}$),

$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle POC} + S_{\triangle BOP} - S_{\triangle BOC} = -\frac{3}{4}(p - \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{16}$.

$\because a = -\frac{3}{4} < 0$, $\therefore$ 当 $p = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 最大值为 $\frac{27}{16}$.

(3) 由 C_2 可知: B(3, 0), D(0, $-3m$), M(1, $-4m$),

$BD^2 = 9m^2 + 9$, $BM^2 = 16m^2 + 4$, $DM^2 = m^2 + 1$.

$\because \angle MBD < 90^\circ$, $\therefore$ 讨论 $\angle BMD = 90^\circ$ 和 $\angle BDM = 90^\circ$ 两种情况:

当 $\angle BMD = 90^\circ$ 时, $BM^2 + DM^2 = BD^2$, 即 $16m^2 + 4 + m^2 + 1 = 9m^2 + 9$,

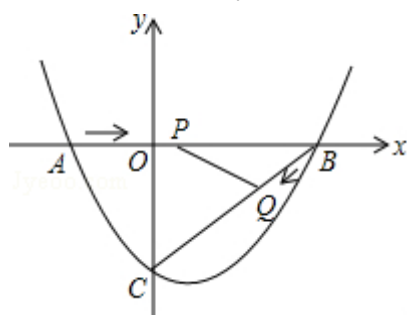
解得: $m_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去).

当 $\angle BDM = 90^\circ$ 时, $BD^2 + DM^2 = BM^2$, 即 $9m^2 + 9 + m^2 + 1 = 16m^2 + 4$,

解得: $m_1 = -1$, $m_2 = 1$ (舍去).

综上所述, $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m = -1$ 时, $\triangle BDM$ 为直角三角形.

2. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与x轴交于点A(-2, 0)、B(4, 0) 两点, 与y轴交于点C.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点P从A点出发, 在线段AB上以每秒3个单位长度的速度向B点运动, 同时点Q从B点出发, 在线段BC上以每秒1个单位长度的速度向C点运动, 其中一个点到达终点时, 另一个点也停止运动, 当 $\triangle PBQ$ 存在时, 求运动多少秒使 $\triangle PBQ$ 的面积最大, 最大面积是多少?

(3) 当 $\triangle PBQ$ 的面积最大时, 在BC下方的抛物线上存在点K, 使 $S_{\triangle CBK} : S_{\triangle PBQ} = 5 : 2$, 求K点坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3$

(2) 运动1秒使 $\triangle PBQ$ 的面积最大, 最大面积是 $\frac{9}{10}$

(3) $K_1(1, -\frac{27}{8})$, $K_2(3, -\frac{15}{8})$

【解析】

【详解】

试题分析: (1) 把点A、B的坐标分别代入抛物线解析式, 列出关于系数a、b的解析式, 通过解方程组求得它们的值;

(2) 设运动时间为t秒. 利用三角形的面积公式列出 $S_{\triangle PBQ}$ 与t的函数关系式 $S_{\triangle PBQ} = -\frac{9}{10}(t-1)^2 + \frac{9}{10}$. 利用二次函数的图象性质进行解答;

(3) 利用待定系数法求得直线BC的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - 3$. 由二次函数图象上点的坐标特征可设点K的坐标为 $(m, \frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m - 3)$.

如图2, 过点K作KE∥y轴, 交BC于点E. 结合已知条件和(2)中的结果求得 $S_{\triangle CBK} = \frac{9}{4}$. 则根

据图形得到: $S_{\triangle CBK} = S_{\triangle CEK} + S_{\triangle BEK} = \frac{1}{2}EK \cdot m + \frac{1}{2} \cdot EK \cdot (4-m)$, 把相关线段的长度代入推知:

$-\frac{3}{4}m^2 + 3m = \frac{9}{4}$. 易求得 $K_1(1, -\frac{27}{8})$, $K_2(3, -\frac{15}{8})$.

解: (1) 把点A(-2, 0)、B(4, 0)分别代入 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$), 得

$$\begin{cases} 4a - 2b - 3 = 0 \\ 16a + 4b - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases},$$

所以该抛物线的解析式为: $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3$;

(2) 设运动时间为t秒, 则AP=3t, BQ=t.

$\therefore PB = 6 - 3t$.

由题意得, 点C的坐标为(0, -3).

在Rt $\triangle BOC$ 中, $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

如图1, 过点Q作QH⊥AB于点H.

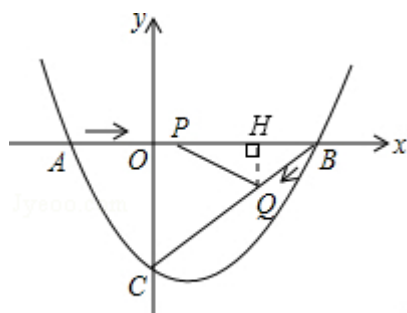


图1

$$\therefore QH \parallel CO,$$

$$\therefore \triangle BHQ \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{HB}{OC} = \frac{BQ}{BC}, \text{ 即 } \frac{Hb}{3} = \frac{t}{5},$$

$$\therefore HQ = \frac{3}{5}t.$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} PB \cdot HQ = \frac{1}{2} (6 - 3t) \cdot \frac{3}{5}t = -\frac{9}{10}t^2 + \frac{9}{5}t = -\frac{9}{10}(t - 1)^2 + \frac{9}{10}.$$

当 $\triangle PBQ$ 存在时, $0 < t < 2$

$\therefore$ 当 $t=1$ 时,

$$S_{\triangle PBQ_{\text{最大}}} = \frac{9}{10}.$$

答: 运动1秒使 $\triangle PBQ$ 的面积最大, 最大面积是 $\frac{9}{10}$;

(3) 设直线BC的解析式为 $y=kx+c$ ($k \neq 0$).

把 $B(4, 0)$, $C(0, -3)$ 代入, 得

$$\begin{cases} 4k + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

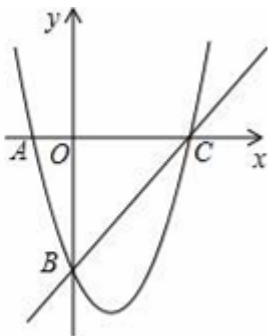
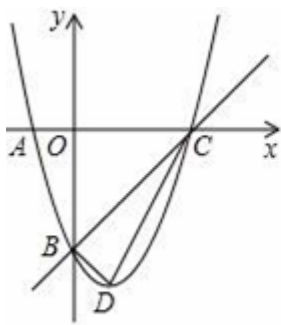
$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线BC的解析式为 } y = \frac{3}{4}x - 3.$$

$\therefore$ 点K在抛物线上.

$$\therefore \text{设点K的坐标为 } (m, \frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{4}m - 3).$$

如图2, 过点K作 $KE \parallel y$ 轴, 交BC于点E. 则点E的坐标为 $(m, \frac{3}{4}m - 3)$.



备用图

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$; (2) $C(3, 0)$, $D(1, -4)$, $\triangle BCD$ 是直角三角形; (

$$3) S = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t (0 < t < 3) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t (t < 0 \text{ 或 } t > 3) \end{cases}$$

【解析】

试题分析: (1) 先解一元二次方程, 然后用待定系数法求出抛物线解析式;

(2) 先解方程求出抛物线与x轴的交点, 再判断出 $\triangle BOC$ 和 $\triangle BED$ 都是等腰直角三角形, 从而得到结论;

(3) 先求出 $QF=1$, 再分两种情况, 当点P在点M上方和下方, 分别计算即可.

试题解析: 解 (1) $\because x^2 + 4x + 3 = 0$, $\therefore x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $\therefore m, n$ 是一元二次方程

$x^2 + 4x + 3 = 0$ 的两个实数根, 且 $|m| < |n|$, $\therefore m = -1$, $n = -3$, $\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的

图象经过点A(m, 0), B(0, n), $\therefore \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$, $\therefore$ 抛物线解析式为

$$y = x^2 - 2x - 3;$$

(2) 令 $y=0$, 则 $x^2 - 2x - 3 = 0$, $\therefore x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $\therefore C(3, 0)$, $\therefore y = x^2 - 2x - 3 =$

$(x-1)^2 - 4$, $\therefore$ 顶点坐标D(1, -4), 过点D作 $DE \perp y$ 轴, $\therefore OB=OC=3$, $\therefore BE=DE=1$, $\therefore \triangle BOC$

和 $\triangle BED$ 都是等腰直角三角形, $\therefore \angle OBC = \angle DBE = 45^\circ$, $\therefore \angle CBD = 90^\circ$, $\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形;

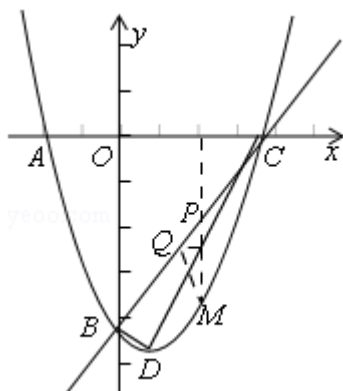
(3) 如图, $\because B(0, -3)$, $C(3, 0)$, $\therefore$ 直线BC解析式为 $y = x - 3$, $\therefore$ 点P的横坐标为t, $PM \perp x$ 轴, $\therefore$ 点M的横坐标为t, $\therefore$ 点P在直线BC上, 点M在抛物线上, $\therefore P(t, t-3)$, $M(t, t^2 - 2t - 3)$, 过点Q作 $QF \perp PM$, $\therefore \triangle PQF$ 是等腰直角三角形, $\therefore PQ = \sqrt{2}$, $\therefore QF = 1$.

①当点P在点M上方时, 即 $0 < t < 3$ 时, $PM = t - 3 - (t^2 - 2t - 3) = -t^2 + 3t$, $\therefore S = \frac{1}{2} PM \times QF$

$= \frac{1}{2} (-t^2 + 3t) = -\frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t$, ②如图3, 当点P在点M下方时, 即 $t < 0$ 或 $t > 3$ 时, $PM =$

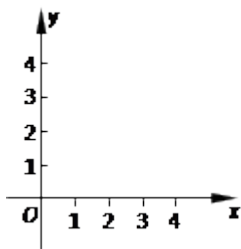
$$t^2 - 2t - 3 - (t - 3) = t^2 - 3t, \therefore S = \frac{1}{2} PM \times QF = \frac{1}{2} (t^2 - 3t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t.$$

综上所述, $s = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t & (0 < t < 3) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t & (t < 0 \text{ 或 } t > 3) \end{cases}$.



考点：二次函数综合题；分类讨论．

4. 如图所示，已知平面直角坐标系xOy，抛物线过点A(4,0)、B(1,3)



(1)求该抛物线的表达式，并写出该抛物线的对称轴和顶点坐标；

(2)记该抛物线的对称轴为直线l，设抛物线上的点P(m,n)在第四象限，点P关于直线l的对称点为E，点E关于y轴的对称点为F，若四边形OAPF的面积为20，求m、n的值．

【答案】(1) $y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ ，对称轴为：x=2，顶点坐标为：(2, 4)

(2)m、n的值分别为 5, -5

【解析】

(1) 将点A(4,0)、B(1,3) 的坐标分别代入 $y = -x^2 + bx + c$ ，得：

$$4b + c - 16 = 0, \quad b + c - 1 = 3,$$

解得：b="4"， c=0.

所以抛物线的表达式为： $y = -x^2 + 4x$.

$$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4,$$

所以 抛物线的对称轴为：x=2，顶点坐标为：(2, 4) .

(2) 由题可知，E、F点坐标分别为(4-m, n)，(m-4, n) .

三角形POF的面积为： $\frac{1}{2} \times 4 \times |n| = 2|n|$ ，

三角形AOP的面积为： $\frac{1}{2} \times 4 \times |n| = 2|n|$ ，

四边形OAPF的面积= 三角形POF的面积+三角形AOP的面积=20，

所以 $4|n|=20$ ， $n=-5$. (因为点P(m,n)在第四象限，所以n<0)

$$\text{又 } n = -m^2 + 4m,$$

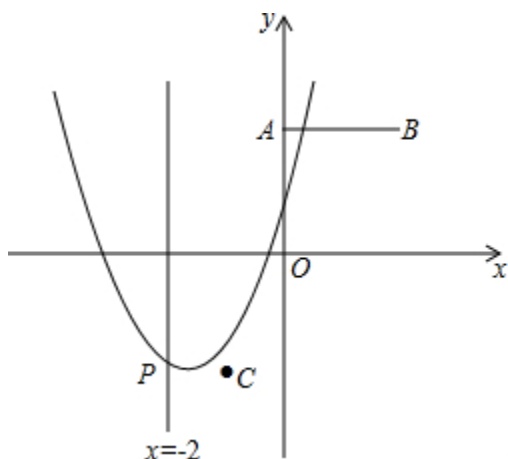
所以 $m^2 - 4m - 5 = 0$, $m = 5$. (因为点 $P(m, n)$ 在第四象限, 所以 $m > 0$)

故所求 m 、 n 的值分别为 5, -5.

5. 如图, 已知点 $A(0, 2)$, $B(2, 2)$, $C(-1, -2)$, 抛物线 $F: y = x^2 - 2mx + m^2 - 2$ 与直线 $x = -2$ 交于点 P .

(1) 当抛物线 F 经过点 C 时, 求它的解析式;

(2) 设点 P 的纵坐标为 y_P , 求 y_P 的最小值, 此时抛物线 F 上有两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 且 $x_1 < x_2 \leq -2$, 比较 y_1 与 y_2 的大小.



【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 1$; (2) $y_1 > y_2$.

【解析】

【分析】

(1) 根据抛物线 $F: y = x^2 - 2mx + m^2 - 2$ 过点 $C(-1, -2)$, 可以求得抛物线 F 的表达式;

(2) 根据题意, 可以求得 y_P 的最小值和此时抛物线的表达式, 从而可以比较 y_1 与 y_2 的大小.

【详解】

(1) $\because$ 抛物线 F 经过点 $C(-1, -2)$,

$$\therefore -2 = 1 + 2m + m^2 - 2.$$

$$\therefore m_1 = m_2 = -1.$$

$\therefore$ 抛物线 F 的解析式是 $y = x^2 + 2x - 1$.

$$(2) \text{ 当 } x = -2 \text{ 时, } y_P = 4 + 4m + m^2 - 2 = (m + 2)^2 - 2.$$

$\therefore$ 当 $m = -2$ 时, y_P 的最小值为 -2 .

此时抛物线 F 的表达式是 $y = (x + 2)^2 - 2$.

$\therefore$ 当 $x \leq -2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

$$\because x_1 < x_2 \leq -2,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

【点睛】

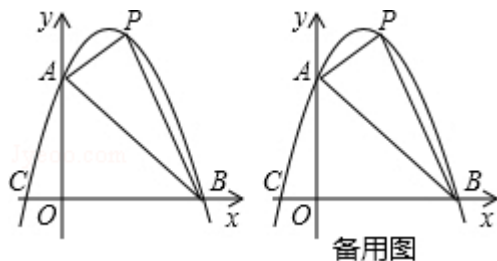
本题考查二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求二次函数解析式，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答问题．

6. 已知：如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点A（0，6），B（6，0），C（-2，0），点P是线段AB上方抛物线上的一个动点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）当点P运动到什么位置时， $\triangle PAB$ 的面积有最大值？

（3）过点P作x轴的垂线，交线段AB于点D，再过点P做 $PE \parallel x$ 轴交抛物线于点E，连结DE，请问是否存在点P使 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形？若存在，求出点P的坐标；若不存在，说明理由．



【答案】（1）抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ；（2）当 $t=3$ 时， $\triangle PAB$ 的面积有最大值；（3）点P（4，6）．

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法进行求解即可得；

（2）作 $PM \perp OB$ 与点M，交AB于点N，作 $AG \perp PM$ ，先求出直线AB解析式为 $y = -x + 6$ ，设P（t， $-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 6$ ），则N（t， $-t + 6$ ），由 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PAN} + S_{\triangle PBN} = \frac{1}{2}PN \cdot AG + \frac{1}{2}PN \cdot BM = \frac{1}{2}PN \cdot OB$ 列出关于t的函数表达式，利用二次函数的性质求解可得；

（3）由 $PH \perp OB$ 知 $DH \parallel AO$ ，据此由 $OA = OB = 6$ 得 $\angle BDH = \angle BAO = 45^\circ$ ，结合 $\angle DPE = 90^\circ$ 知若 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形，则 $\angle EDP = 45^\circ$ ，从而得出点E与点A重合，求出 $y=6$ 时x的值即可得出答案．

【详解】（1） $\because$ 抛物线过点B（6，0）、C（-2，0），

$\therefore$ 设抛物线解析式为 $y = a(x-6)(x+2)$ ，

将点A（0，6）代入，得： $-12a = 6$ ，

解得： $a = -\frac{1}{2}$ ，

所以抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}(x-6)(x+2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ；

（2）如图1，过点P作 $PM \perp OB$ 与点M，交AB于点N，作 $AG \perp PM$ 于点G，

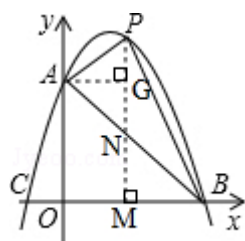


图 1

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
 如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/668031103071006055>