

高一数学 一次函数与二次函数专项突破

一、教学目标：

- 1、灵活运用二次函数的性质解一元二次方程；
- 2、熟练解决二次函数与与其它函数结合的有关问题。

二、重点和难点：

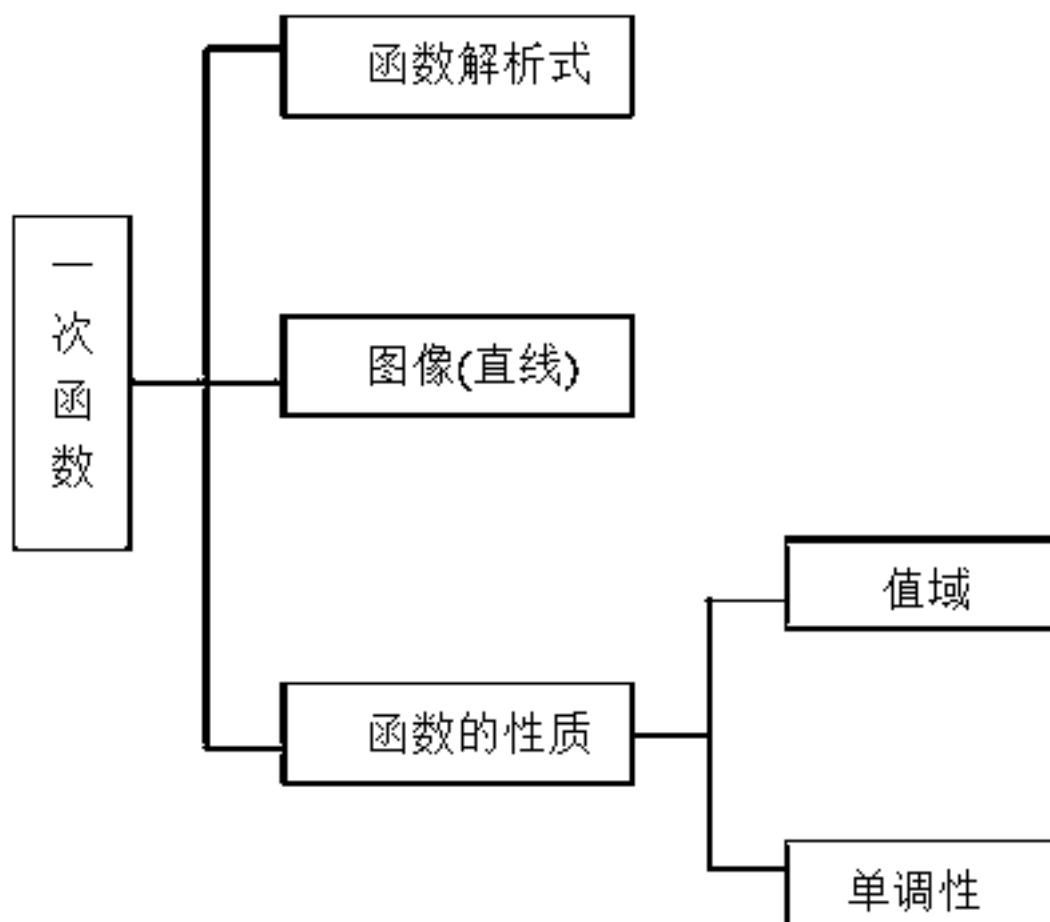
- 1、重点：一次函数和二次函数的性质及图象特征；
- 2、难点：二次函数的性质运用。



知识点集训

一、一次函数的性质和图像

1、知识结构



学必求其心得，业必贵于专精

2、一次函数的意义:

函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 叫做一次函数，它的定义域是 $\mathbf{R}$ ，值域是 $\mathbf{R}$ ；

- (1) 一次函数的图象是直线，所以一次函数又叫线性函数；
- (2) 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中， k 叫直线的斜率， b 叫直线在 y 轴上的截距； $k > 0$ 时，函数是增函数， $k < 0$ 时，函数是减函数；
- (3) $b = 0$ 时该函数是奇函数且为正比例函数，直线过原点； $b \neq 0$ 时，它既不是奇函数，也不是偶函数；

3、当 $b=0$ 时， $y=kx$ ，即正比例函数，其函数图像为一条直线. 直线 $y=kx+b$ 的图象和性质与 k 、 b 的关系如下：

- (1) $k > 0, b > 0$ ：经过第一、二、三象限；
- (2) $k > 0, b < 0$ ：经过第一、三、四象限；
- (3) $k > 0, b = 0$ ：经过第一、三象限（经过原点）；

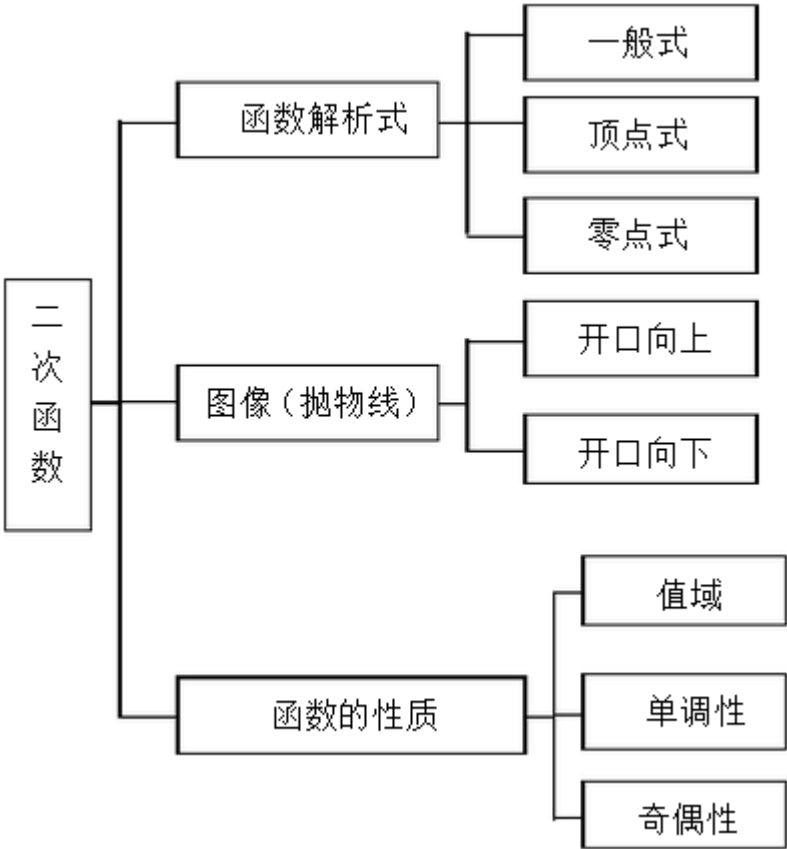
结论： $k > 0$ 时，图象从左到右上升， y 随 x 的增大而增大.

- (4) $k < 0, b > 0$ ：经过第一、二、四象限；
- (5) $k < 0, b < 0$ ：经过第二、三、四象限；
- (6) $k < 0, b = 0$ ：经过第二、四象限；

结论： $k < 0$ 时，图象从左到右下降， y 随 x 的增大而减小.

二、二次函数的性质与图像

1、知识结构



2、函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 叫做二次函数，它的定义域为是 $\mathbf{R}$ ，图象是一条抛物线；

(1) 当 $b=0$ 时，该函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称；

(2) 当 $a>0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上，二次函数的单调减区间为 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ，单调增区间为 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ ，值域为 $[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$ ；

(3) 当 $a<0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下，二次函数的单调增区间为 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ，单调减区间为 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ ，值域为 $(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$ ；

3、它们的顶点坐标及对称轴如下表：

解析式	$y=ax^2$ ($a\neq0$)	$y=a$ ($x-h$) ² ($a\neq0$)	$y=a(x-h)^2+k$ ($a\neq0$)	$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)
-----	--------------------------	---	--------------------------------	-------------------------------

学必求其心得，业必贵于专精

顶点坐标	(0, 0)	(h, 0)	(h,k)	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$
------	--------	--------	-------	---------------------------------------

对称轴	$x=0$	$x=h$	$x=h$	$x=-\frac{b}{2a}$
-----	-------	-------	-------	-------------------



典例精讲

1、已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ，且 $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$ ，则()

- A. $c \leq 3$ B. $3 < c \leq 6$ C. $6 < c \leq 9$ D. $c > 9$

【答案】C

2、若函数 $y = (2m-3)x + (3n+1)$ 的图象经过第一、二、三象限，则 m 与 n 的取值是 ()

- A. $m > \frac{3}{2}, n > -\frac{1}{3}$ B. $m > 3, n > -3$
C. $m < \frac{3}{2}, n < -\frac{1}{3}$ D. $m > \frac{3}{2}, n < \frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

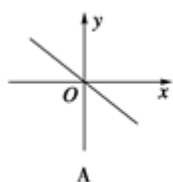
因为函数 $y = (2m-3)x + (3n+1)$ 的图象经过第一、二、三象限，

所以 $\begin{cases} 2m-3 > 0, \\ 3n+1 > 0, \end{cases}$

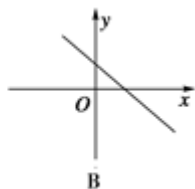
所以 $\begin{cases} m > \frac{3}{2}, \\ n > -\frac{1}{3}. \end{cases}$

3、一次函数 $y = kx + \frac{1}{k} (k \neq 0)$ 的图象可能是()

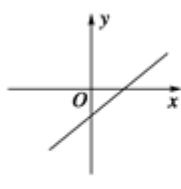
学必求其心得，业必贵于专精



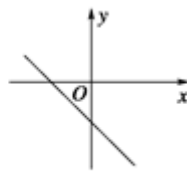
A. A 图



B. B 图



C. C 图



D. D 图

【答案】D

【解析】

若 $k > 0$, 则 $\frac{1}{k} > 0$ 否定 C; 若 $k < 0$, 则 $\frac{1}{k} < 0$. 否定 A、B. $\therefore$ 选 D.

4、 $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ ($-6 \leq a \leq 3$) 的最大值为()

A. 9

B. $\frac{9}{2}$

C. 3

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】因为 $-6 \leq a \leq 3$, 所以 $\sqrt{(3-a)(a+6)} \leq \frac{(3-a)+(a+6)}{2} = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $3-a=a+6$, 即 $a=-\frac{3}{2}$ 时等号成立, 故选 B.

5、设 $m \in R, f(x) = x^2 - x + a (a > 0)$, 且 $f(m) < 0$, 则 $f(m+1)$ 的值 ()

A. 大于 0

B. 小于 0

C. 等于 0

D. 不确定

【答案】A

【解析】

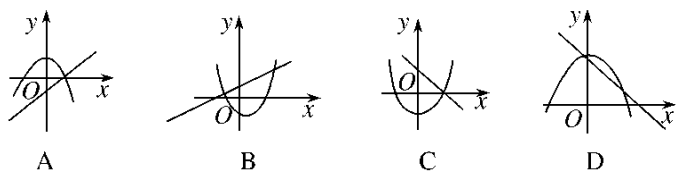
函数 $f(x) = x^2 - x + a$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$, $f(0) = a$, $\therefore a > 0, \therefore f(0) > 0$, 由二次函数的对称性可知

$f(1) = f(0) > 0$. $\therefore$ 抛物线的开口向上, $\therefore$ 由图象可知当 $x > 1$ 时, 恒有

$f(x) > 0$. $\therefore f(m) < 0, \therefore 0 < m < 1. \therefore m > 0, \therefore m+1 > 1, \therefore f(m+1) > 0$.

学必求其心得，业必贵于专精

6、已知一次函数 $y = ax + c$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，它们在同一坐标系中的大致图象是 ()



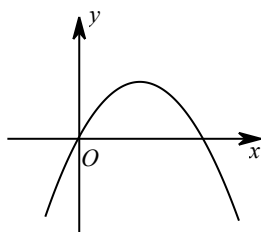
- A. A 图 B. B 图 C. C 图 D. D 图

【答案】D

【解析】

当 $a > 0$ 时,一次函数单调递增,二次函数开口向上,又一次函数与二次函数都过点 $(0, c)$;当 $a < 0$ 时,一次函数递减,二次函数开口向下,又都过点 $(0, c)$. 故排除 A、B、C.

7、已知 $y = ax^2 + bx$ 的图象如下图所示, 则 $y = ax - b$ 的图象一定过 ()



- A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限
C. 第二、三、四象限 D. 第一、三、四象限

【答案】C

【解析】

$a < 0, b > 0$, 从而可得直线过二、三、四象限

8、设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbb{R})$ 。

(I) 当 $b = \frac{a^2}{4} + 1$

学必求其心得，业必贵于专精

时,求函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式;

(II) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在零点, $0 \leq b - 2a \leq 1$, 求 b 的取值范围.

【答案】(I) 当 $b = \frac{a^2}{4} + 1$ 时, $f(x) = (x + \frac{a}{2})^2 + 1$, 故对称轴为直线 $x = -\frac{a}{2}$.

当 $a \leq -2$ 时, $g(a) = f(1) = \frac{a^2}{4} + a + 2$.

当 $-2 < a \leq 2$ 时, $g(a) = f(-\frac{a}{2}) = 1$.

当 $a > 2$ 时, $g(a) = f(-1) = \frac{a^2}{4} - a + 2$.

$$\text{综上, } g(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{4} + a + 2, & a \leq -2, \\ 1, & -2 < a \leq 2, \\ \frac{a^2}{4} - a + 2, & a > 2. \end{cases}$$

(II) 设 s, t 为方程 $f(x) = 0$ 的解, 且 $-1 \leq t \leq 1$, 则 $\begin{cases} s + t = -a, \\ st = b, \end{cases}$

由于 $0 \leq b - 2a \leq 1$, 因此 $\frac{-2t}{t+2} \leq s \leq \frac{1-2t}{t+2}$ ($-1 \leq t \leq 1$).

当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $\frac{-2t^2}{t+2} \leq st \leq \frac{t-2t^2}{t+2}$,

由于 $-\frac{2}{3} \leq \frac{2t^2}{t+2} \leq 0$ 和 $-\frac{1}{3} \leq \frac{t-2t^2}{t+2} \leq 9-4\sqrt{5}$, 所以 $-\frac{2}{3} \leq b \leq 9-4\sqrt{5}$.

当 $-1 \leq t < 0$ 时, $\frac{t-2t^2}{t+2} \leq st \leq \frac{-2t^2}{t+2}$,

由于 $-2 \leq \frac{-2t^2}{t+2} < 0$ 和 $-3 \leq \frac{t-2t^2}{t+2} < 0$, 所以 $-3 \leq b < 0$.

故 b 的取值范围是 $[-3, 9-4\sqrt{5}]$.

学必求其心得，业必贵于专精

9、设 a 为实数，函数 $f(x) = x^2 - |x - a| + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，试求 a 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，求 $f(x)$ 的最小值；

(3) 甲同学认为：无论 a 取何实数，函数 $f(x)$ 都不可能是奇函数. 这种说法是否正确？请说明理由.

【答案】(1) $a=0$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 正确；理由见解析

【解析】

(1) $\because f(x)$ 是偶函数，

$$\therefore f(a) = f(-a),$$

$$\text{即 } a^2 - 1 = a^2 - 2|a| + 1$$

$$\therefore a = 0$$

当 $a=0$ 时 $f(x) = x^2 - |x| + 1$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，

$$f(-x) = (-x)^2 - |-x| + 1 = x^2 - |x| + 1 = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数；

综上得 $a=0$.

(2) 此时 $f(x) = x^2 - |x| + 1$ ，

$$\therefore f(x) = \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \text{ 当且仅当 } |x| = \frac{1}{2} \text{ 即 } x = \pm \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

故所求 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

(3) 正确，理由如下：

假设存在实数 a 使得函数 $f(x)$ 是奇函数，注意到 $x \in \mathbf{R}$ ，

$$\therefore f(0) = f(-0) = -f(0),$$

$$\therefore f(0) = 0, \text{ 即 } -|a| + 1 = 0, \quad a = \pm 1.$$

又 $\because f(1) = -f(-1)$ ，即

学必求其心得，业必贵于专精

$$\begin{aligned}0 &= f(1) + f(-1) \\&= (1^2 - |1-a| + 1) + (1^2 - |1+a| + 1) \\&= 4 - (|1-a| + |1+a|) \\&= 4 - 2 \\&= 2\end{aligned}$$

矛盾!

故假设不正确,即无论 a 取何实数, 函数 $f(x)$ 都不可能是奇函数, 所以甲说法正确.

10、已知二次函数 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, 若 $f(x)$ 在区间 $[2a, a+1]$ 上不单调, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < a < \frac{1}{2}$

【解析】

根据公式, 二次函数 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{-4}{2 \times 2}$,

即直线 $x = 1$,

函数 $f(x)$ 在区间 $[2a, a+1]$ 上不单调,

说明 $x = 1$ 在区间 $[2a, a+1]$ 内部,

因此列式 $2a < 1 < a+1$,

所以, a 的取值范围是 $0 < a < \frac{1}{2}$.

11、设 $f(x) = x^2 + bx + c$ 且 $f(0) = f(2)$, 则 ()

A. $f(-2) < c < f\left(\frac{3}{2}\right)$

B. $f\left(\frac{3}{2}\right) < c < f(-2)$

C. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f(-2) < c$

D. $c < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(-2)$

【答案】 B

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

由 $f(0)=f(2)$ 知，二次函数图像的对称轴为 $x=1$ ，

又因为对称轴为 $x=-\frac{b}{2}$ ，所以 $b=-2$ ， $f(x)=x^2-2x+c$ ，

由二次函数的对称性，则 $c=f(0)=f(2)$ ， $f(-2)=f(4)$ ，

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)<f(2)<f(4)$ ，即 $f\left(\frac{3}{2}\right)<c<f(-2)$ 。

12、设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象以 y 轴为对称轴，已知 $a+b=1$ ，而且若点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上，则点 (x,y^2+1) 在函数 $g(x)=f(f(x))$ 的图象上。

(1) 求 $g(x)$ 的解析式；

(2) 设 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$ ，问是否存在实数 λ ，使 $F(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内是减函数，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 内是增函数。

【答案】

(1) $g(x)=x^4+2x^2+2$ (2) 存在;3

【解析】

(1) 因为图象以 y 轴为对称轴，所以 $b=0$ ，

又因为 $a+b=1$ ，所以 $a=1$ ，即 $f(x)=x^2+c$ ，

由点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上，得 $y=f(x)$ ，

由点 (x,y^2+1) 在函数 $g(x)=f(f(x))$ 的图象上，得 $y^2+1=f(f(x))=f(y)=y^2+c$ ，

所以 $c=1$ ，即 $f(x)=x^2+1$ ， $g(x)=f(f(x))=f(x^2+1)=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

(2) 假设存在，使 $F(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内是减函数，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 内是增函数，

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的一个极小值点， $F(x)=(x^2+1)^2+1-\lambda(x^2+1)=\left((x^2+1)-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4}+1$ ，

学必求其心得，业必贵于专精

所以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{\lambda}{2}$ ，解得 $\lambda = 3$ ，

经检验知 $\lambda = 3$ 符合题意，所以 $\lambda = 3$ 。

13、已知函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域；

(2) 设 $F(x) = m\sqrt{1-x^2} + f(x)$ ，记 $F(x)$ 的最大值为 $g(m)$ ，求 $g(m)$ 的表达式；

(3) 在(2)的条件下，试求满足不等式 $g(-m) > \left(\frac{9}{4}\right)^m$ 的实数 m 的取值范围。

【答案】见解析。

【解析】

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ ，对原解析式平方可得： $[f(x)]^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ ，结合二次函数 $g(x) = 1-x^2$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上的图像可知，最值分别为 $g(\pm 1) = 0$ ， $g(0) = 1$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $\{x | \sqrt{2} \leq x \leq 2\}$

(2) 令 $f(x) = t$ ($t \in [\sqrt{2}, 2]$)，则 $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}t^2 - 1$ ， $F(x) = m(\frac{1}{2}t^2 - 1) + t$ 。

①当 $m = 0$ 时， $F(x) = f(x)$ ， $g(m) = g(0) = f(0) = 2$ ；

②当 $m > 0$ 时，抛物线 $h(t) = m(\frac{1}{2}t^2 - 1) + t$ 的开口向上，且对称轴 $t = -\frac{1}{m}$ 在区间 $[\sqrt{2}, 2]$ 的左侧，故 $g(m) = h(2) = m + 2$ ；

③当 $m < 0$ 时，抛物线 $h(t) = m(\frac{1}{2}t^2 - 1) + t$ 的开口向下，且对称轴 $t = -\frac{1}{m}$ 与区间 $[\sqrt{2}, 2]$ 的位置不定，需要再次分类讨论：若 $-\frac{1}{m} \in (0, \sqrt{2}]$ （即 $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ），则 $g(m) = h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ；若 $-\frac{1}{m} \in (\sqrt{2}, 2]$ （即 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq -\frac{1}{2}$ ），则 $g(m) = h(-\frac{1}{m}) = -m - \frac{1}{2m}$ ；若 $-\frac{1}{m} \in (2, +\infty)$

则 $g(m) = h(2) = m + 2$ ；综上所述， $g(m) = \begin{cases} m + 2, & m > -\frac{1}{2} \\ -m - \frac{1}{2m}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}, & m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 。

学必求其心得，业必贵于专精

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } g(-m) = \begin{cases} -m+2, & m < \frac{1}{2} \\ m + \frac{1}{2m}, & \frac{1}{2} \leq m < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}, & m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ 当 } m < \frac{1}{2} \text{ 时, } g(-m) = -m+2 \text{ 为}$$

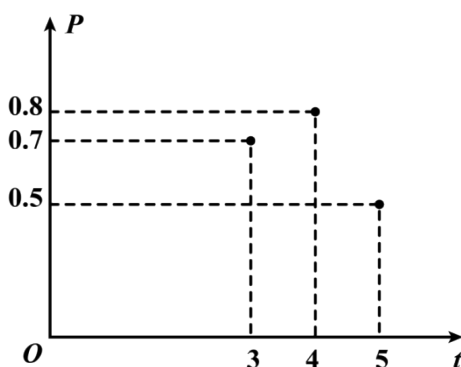
减函数, $r(m) = (\frac{9}{4})^m$ 为增函数, $g(-m) > -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} = (\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} > (\frac{9}{4})^m$, $g(-m) > (\frac{9}{4})^m$ 恒成立; 当

$\frac{1}{2} \leq m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g(-m) = m + \frac{1}{2m}$ 为减函数, $r(m) = (\frac{9}{4})^m$ 为增函数,

$g(-m) \leq g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} = (\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{9}{4})^m$, $g(-m) > (\frac{9}{4})^m$ 不成立; 当 $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$g(-m) = \sqrt{2} < \frac{3}{2} = (\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{9}{4})^m$, $g(-m) > (\frac{9}{4})^m$ 不成立. 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2})$.

14、(2014 年北京高考文)加工爆米花时,爆开且不糊的粒数的百分比称为“可食用率”。在特定条件下,可食用率 p 与加工时间 t (单位:分钟)满足的函数关系 $p = at^2 + bt + c$ (a 、 b 、 c 是常数),如图记录了三次实验的数据.根据上述函数模型和实验数据,可以得到最佳加工时间为 ()



A. 3.50 分钟

B. 3.75 分钟

C. 4.00 分钟

D. 4.25 分钟

分钟

【答案】B

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

由图形可知，三点 $(3,0.7), (4,0.8), (5,0.5)$ 都在函数 $p = at^2 + bt + c$ 的图象上，

$$\text{所以} \begin{cases} 9a + 3b + c = 0.7 \\ 16a + 4b + c = 0.8 \\ 25a + 5b + c = 0.5 \end{cases}, \text{解得 } a = -0.2, b = 1.5, c = -2.$$

所以 $p = -0.2t^2 + 1.5t - 2 = -0.2(t - \frac{15}{4})^2 + \frac{13}{16}$ ，当 $t = \frac{15}{4} = 3.75$ 时， p 取最大值，故选 B.

15、借助计算机（器）作某些分段函数图象时，分段函数的表示有时

可以利用函数 $S(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ 例如要表示分段函数 $g(x) = \begin{cases} x, x > 2, \\ 0, x = 2, \\ -x, x < 2. \end{cases}$ 可以将 $g(x)$ 表

示为 $g(x) = xS(x-2) + (-x)S(2-x)$. 设 $f(x) = (-x^2 + 4x - 3)S(x-1) + (x^2 - 1)S(1-x)$.

- (1) 请把函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式；
- (2) 设 $F(x) = f(x-k)$ ，且 $F(x)$ 为奇函数，写出满足条件的 k 值；（不需要证明）
- (3) 设 $h(x) = (x^2 - x + a - a^2)S(x-a) + (x^2 + x - a - a^2)S(a-x)$ ，求函数 $h(x)$ 的最小值.

【答案】

(1) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, x \geq 1, \\ x^2 - 1, x < 1. \end{cases}$ (2) -1 (3) 当 $a \leq 0$ 时， $h(x)$ 的最小值为 $-a^2 - a - \frac{1}{4}$ ；当 $a > 0$ 时， $h(x)$ 的最小值为 $-a^2 - a - \frac{1}{4}$

【解析】

(1) 当 $x \geq 1$ 时， $S(x-1) = 1$ ， $S(1-x) = 0$ ；当 $x < 1$ 时， $S(x-1) = 0$ ， $S(1-x) = 1$ ，所以 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, x \geq 1, \\ x^2 - 1, x < 1. \end{cases}$ 2分

(2) $F(x) = f(x-k)$ 的图像为 $f(x-k)$ 水平向右平移 k 个单位， $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 1, x \geq 1, \\ x^2 - 1, x < 1. \end{cases}$ ，因为 $f(x)$ 有三个零点 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$ ，

则平移后三个零点应该一个位于原点，另外两个关于原点对称，

学必求其心得，业必贵于专精

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/668060131006006054>