

大连市 2024-2025 学年上学年度高考适应性测试（一）

高三数学

考生留意：

1. 本试卷共 150 分,考试时间 120 分钟。分四大题, 22 小题, 共 6 页

2. 请将各题答案填写在答题卡上。

3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容

一、单选题（每题只有一个选项是正确答案，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集 $A = \{x | x + 2 \geq 3\}$ 合, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

A. $\{3\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{-3, -1\}$ D. $\{-1, 1, 3\}$

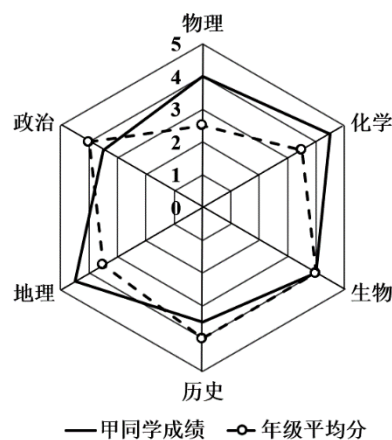
2. 若复数 z 满意 $zi = 2 - z$, 则 $|z + 2i| = (\quad)$.

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

3. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_2 为圆心的圆恰好与双曲线 C 的两渐近线相切, 且该圆恰好经过线段 OF_2 的中点, 则双曲线 C 的离心率是 $(\quad)$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

4. 2024 年起, 我市将试行“3+1+2”的一般高考新模式, 即除语文、数学、外语 3 门必选科目外, 考生再从物理、历史中选 1 门, 从化学、生物、地理、政治中选 2 门作为选考科目. 为了帮助学生合理选科, 某中学将高一每个学生的六门科目综合成果按比例均缩放成 5 分制, 绘制成雷达图. 甲同学的成果雷达图如图所示, 下面叙述肯定不正确的是 $(\quad)$



A. 甲的化学成果领先年级平均分最多.
 B. 甲有 2 个科目的成果低于年级平均分.
 C. 甲的成果最好的前两个科目是化学和地理.
 D. 对甲而言, 物理、化学、地理是比较志向的一种选科结果.

5. 已知 $f(x), g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 满意 $f(x) + g(x) = ax^2 + x + 2$, 若对随意的 $1 < x_1 < x_2 < 2$, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > -3$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$

A. $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [0, +\infty)$ B. $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ C. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

6. 已知三棱锥 $S-ABC$ 为正三棱锥, 且 $AB = 6$, $SA = 2\sqrt{15}$, 点 M, N 是线段 AC, SB 的中点, 平面 α 与平面 SBC 没有公共点, 且 $A \in$ 平面 α , 若 l 是平面 α 与平面 ABC 的交线, 则直线 l 与直线 MN 所成角的正切值为 $(\quad)$

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

7. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 图像上一点 $P(s, t) (-2 < t < 2)$ 向右平移 2π 个单位, 得到的点 Q 也在 $f(x)$ 图像

上, 线段 PQ 与函数 $f(x)$ 的图像有 5 个交点, 且满意 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)>f(0)$, 若 $y=f(x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

与 $y=a$ 有两个交点, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-2,-\sqrt{2}]$ B. $[-2,-\sqrt{2}]$ C. $[\sqrt{2},2)$ D. $[\sqrt{2},2]$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, 且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{6a_n+5\sqrt{a_n+1}} (n\in\mathbb{N}^*)$, 则 ()

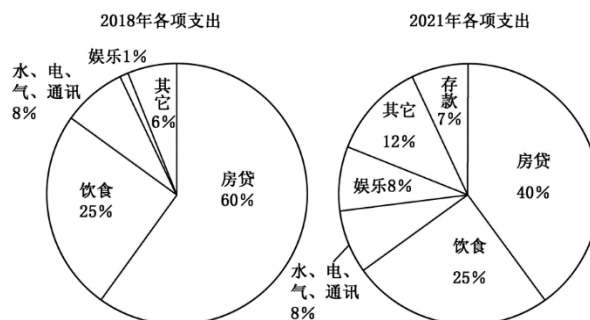
- A. $1<S_{2021}<\frac{7}{5}$ B. $\frac{7}{5}<S_{2021}<\frac{12}{5}$ C. $\frac{12}{5}<S_{2021}<\frac{17}{5}$ D. $\frac{17}{5}<S_{2021}<\frac{22}{5}$

二、多选题 (每题至少有一个选项为正确答案, 少选且正确得 3 分, 每题 5 分, 共 20 分)

9. 小王于 2017 年底贷款购置了一套房子, 依据家庭收入状况, 小王选择了 10 年期每月还款数额相同的还贷方式, 且截止 2024 年底, 他没有再购买其次套房子. 如图是 2024 年和 2024 年小王的家庭收入用于各项支出的比例安排图:

依据以上信息, 推断下列结论中正确的是 ()

- A. 小王一家 2024 年用于饮食的支出费用跟 2024 年相同
B. 小王一家 2024 年用于其他方面的支出费用是 2024 年的 3 倍
C. 小王一家 2024 年的家庭收入比 2024 年增加了 1 倍
D. 小王一家 2024 年用于房贷的支出费用与 2024 年相同



10. 若 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a_0=1$ B. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$
C. $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5$ D. $a_0-|a_1|+a_2-|a_3|+a_4-|a_5|=-1$

11. 《瀑布》(图 1) 是埃舍尔为人所知的作品. 画面两座高塔各有一个几何体, 左塔上方是闻名的“三立方体合体”

(图 2). 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中建立如图 3 所示的空间直角坐标系 (原点 O 为该正方体的中心, x, y, z 轴均垂直该正方体的面), 将该正方体分别围着 x 轴, y 轴, z 轴旋转 45° , 得到的三个正方体

$A_nB_nC_nD_n-A'_nB'_nC'_nD'_n$, $n=1, 2, 3$ (图 4, 5, 6) 结合在一起便可得到一个高度对称的“三立方体合体” (图

7). 在图 7 所示的“三立方体合体”中, 下列结论正确的是 ()



图1

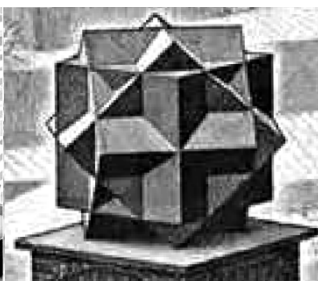


图2

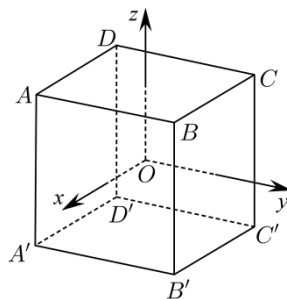


图3

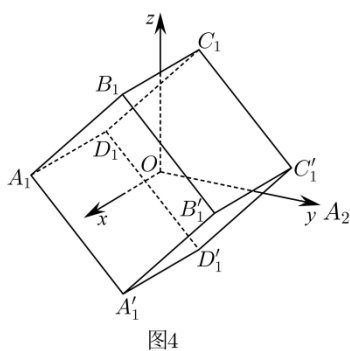


图4

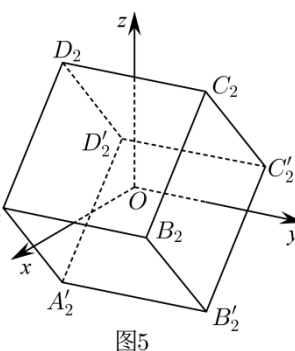


图5

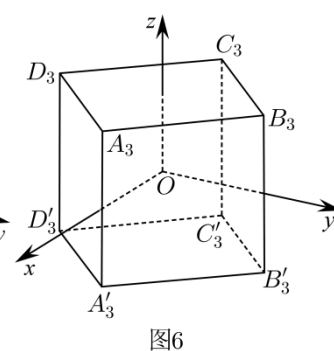


图6

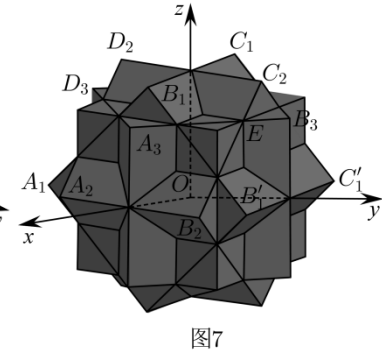


图7

A. 设点 B'_n 的坐标为 (x_n, y_n, z_n) , $n=1, 2, 3$, 则 $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 3$

B. 设 $B_2C_2 \perp A_3B_3 = E$, 则 $B_3E = \frac{2}{3}$

C. 点 A_1 到平面 $B_2C_2B_3$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

D. 若 G 为线段 B_2C_2 上的动点, 则直线 A_2G 与直线 A_1B_1 所成角最小为 $\frac{\pi}{6}$

12. 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x$, 下列结论中正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 取得微小值 -1

B. 对于 $\forall x \in (0, \pi)$, $f(x) < 0$ 恒成立

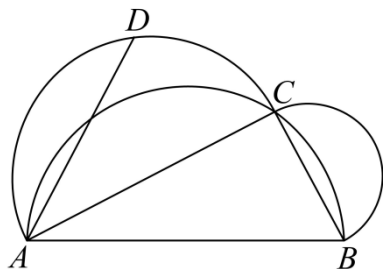
C. 若 $0 < x_1 < x_2 < \pi$, 则 $\frac{x_1}{x_2} < \frac{\sin x_1}{\sin x_2}$

D. 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$, 对于 $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立, 则 a 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$, b 的最小值为 1

三、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leq 1, \\ 5-x^2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(2)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图是古希腊数学家希波克拉底探讨的几何图形, 此图由三个半圆构成, 直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 AB , 直角边 BC 、 AC , 点 D 在以 AC 为直径的半圆上. 已知以直角边 AC 、 BC 为直径的两个半圆的面积之比为 3, $\cos \angle DAB = \frac{4}{5}$, 则 $\cos \angle DAC = \underline{\hspace{2cm}}$.



15. 某汽车销售公司为确定下一年度投入某种产品的宣扬费, 需了解年宣扬费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: 百辆) 的影响, 对近 8 年的年宣扬费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到年销售量 y 与年

宣扬费具有近似关系： $\hat{y}=b\sqrt{x}+a$ 以及一些统计量的值如下： $\sum_{i=1}^8 x_i=372.8$ ， $\sum_{i=1}^8 y_i=4504$ ， $\sum_{i=1}^8 \sqrt{x_i}=54.4$ ， $\sum_{i=1}^8 \sqrt{y_i}=76.2$.

已经求得近似关系中的系数 $b=68$ ，请你依据相关回来分析方法预料当年宣扬费 $x=100$ （千元）时，年销售量 $y=$ _____（百辆）.

16. 闻名的费马问题是法国数学家皮埃尔德费马（1601-1665）于 1643 年提出的平面几何极值问题：“已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小。”费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 时，则使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 的点 P 即为费马点. 已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，且 $AC \perp BC$ ，若 $|PA|+|PB|=\lambda|PC|$ ，则实数 λ 的最小值为_____.

四、解答题（17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分）

17. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1=3$ ， $a_{n+1}=2S_n+3$ ，数列 $\{b_n\}$ 中， b_1 ， b_2-b_1 ， b_3-b_2 ， $\dots$ ， b_n-b_{n-1} ， $\dots$ 是首项、公差均为 2 的等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n = \frac{(2n-1) \cdot a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{\tan B}{\cos C} + \frac{\tan C}{\cos B} = 2(\tan B + \tan C)$

(1)证明： $b+c=2a$ ；

(2)求 $\sin A$ 的最大值.

19. 中国职业篮球联赛（CBA 联赛）分为常规赛和季后赛.由于新冠疫情关系，今年联赛采纳赛会制：全部球队集中在同一个地方竞赛，分两个阶段进行，每个阶段采纳循环赛，分主场竞赛和客场竞赛，积分排名前 8 的球队进入季后赛.季后赛的总决赛采纳五场三胜制（“五场三胜制”是指在五场竞赛中先胜三场者获得竞赛成功，胜者成为本赛季的总冠军）.下表是 A 队在常规赛 60 场竞赛中的竞赛结果记录表.

阶段	竞赛场数	主场场数	获胜场数	主场获胜场数
第一阶段	30	15	20	10
其次阶段	30	15	25	15

(1)依据表中信息，依据 $\alpha=0.10$ 的独立性检验，能否认为竞赛的“主客场”与“输赢”之间有关联？

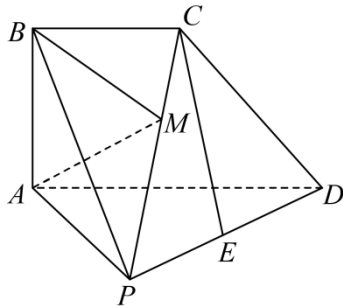
(2)已知 A 队与 B 队在季后赛的总决赛中相遇，假设每场竞赛结果相互独立，A 队除第五场竞赛获胜的概率为 $\frac{1}{2}$ 外，其他场次竞赛获胜的概率等于 A 队常规赛 60 场竞赛获胜的频率.记 X 为 A 队在总决赛中获胜的场数.求 X 的分布列.

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(\chi^2 \geq x_\alpha)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $ABCD \perp$ 平面 PAD , $AD \parallel BC$, $AB = BC = PA = 1$, $AD = 2$, $\angle ADP = 30^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.



(1) 求证: $PD \perp PB$;

(2) 若点 M 在线段 PC 上, 异面直线 BM 和 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 求面 MAB 与面 PCD 夹角的余弦值.

21. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 一个顶点为 $A(-2, 0)$, 直线 l 过点 $Q(3, 0)$ 交双曲线右支于 M, N

两点, 记 $S_{\triangle AMN}$, $S_{\triangle AOM}$, $S_{\triangle AON}$ 的面积分别为 S , S_1 , S_2 . 当 l 与 x 轴垂直时, S_1 的值为 $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

(1) 求双曲线 E 的标准方程;

(2) 若 l 交 y 轴于点 P , $\vec{PM} = \lambda \vec{MQ}$, $\vec{PN} = \mu \vec{NQ}$, 求证: $\lambda + \mu$ 为定值;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\frac{16}{25}S = \mu S_1 + m S_2$, 当 $5 < \lambda \leq 8$ 时, 求实数 m 的取值范围.

22. 对于函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 设区间 I 是 D 上的一个子集, 对于区间 I 上随意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 假如总有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$, 则称函数 $y = f(x)$ 是区间 I 上的 T 函数.

(1) 推断下列函数是否是定义域上的 T 函数: ① $y = x^2$, ② $y = 2x + 1$;

(2) 已知定义域上的严格增函数 $y = f(x)$ 也是定义域上的 T 函数, 试问: $y = f^{-1}(x)$ 是否是定义域上的 T 函数? 若是, 请给出证明; 若不是, 请说明理由;

(3) 若函数 $y = f(x)$ 为区间 I 上的 T 函数, 证明: 对于随意的 $x_1, x_2 \in I$ 和随意的 $\lambda \in (0, 1)$, 总有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

