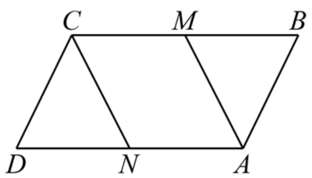
2023-2024学年高一下学期第一次月考解答题压轴题十六大题型专练

【人教A版（2019）】

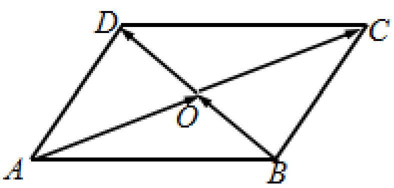
题型1 用向量关系研究几何图形的性质

1．（2023·高一课时练习）已知点E，F，G，H分别是平面四边形$ABCD$的边AB，BC，CD，DA的中点，求证：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

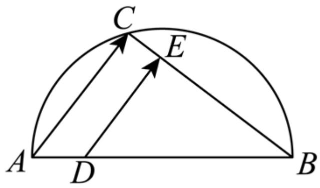
2．（2023下·高一课时练习）如图，已知在四边形$ABCD$中，M，N分别是BC，AD的中点，又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.求证：$CN\overset{//}{=}MA$.



3．（2023·高一课时练习）如图，四边形$ABCD$的对角线AC与BD交于点O，且$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$．求证：四边形$ABCD$是平行四边形．



4．（2023·高一课时练习）如图，半圆的直径$AB=6$，C是半圆上的一点，D、E分别是AB、BC上的点，且$AD=1$，$BE=4$，$DE=3$.

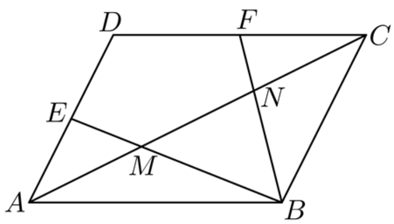


（1）求证：$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{DE}$；

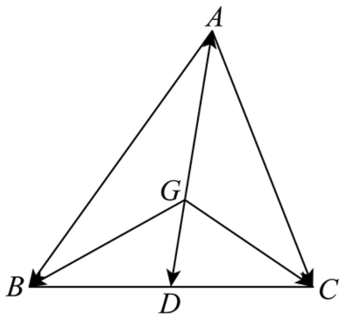
（2）求$|\overrightarrow{AC}|$.

题型 2　向量线性运算的几何应用

5．（2023·全国·高一课堂例题）如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E，F 分别是 AD，DC 的中点，BE，BF 分别交 AC 于 M，N．求证：M，N 三等分 AC．



6．（2023·全国·高一随堂练习）如图，点 D 是 $\triangle ABC$中 BC 边的中点，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.



(1)试用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{AD}$；

(2)若点 G 是$\triangle ABC$的重心，能否用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{AG}$？

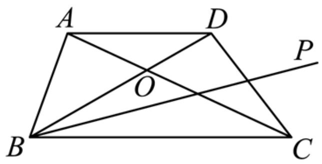
(3)若点 G 是$\triangle ABC$的重心，求$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

7．（2023·高三课时练习）已知点 G 为$\triangle ABC$的重心．

(1)求$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$；

(2)过 G 作直线与 AB、AC 两条边分别交于点 M、N，设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的值．

8．（2023 下·高一课时练习）点 O 是梯形$ABCD$对角线的交点，$|AD|=4,|BC|=6$，$|AB|=2$，设与$\overrightarrow{BC}$同向的单位向量为$\overrightarrow{a_0}$，与$\overrightarrow{BA}$同向的单位向量为$\overrightarrow{b_0}$．



（1）用$\overrightarrow{a_0}$和$\overrightarrow{b_0}$表示$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{OA}$；

（2）若点 P 在梯形$ABCD$所在平面上运动，且$|\overrightarrow{CP}|=2$，求$|\overrightarrow{BP}|$的最大值和最小值．

题型 3　向量的数量积问题

9．（2023 上·江苏徐州·高一统考期末）已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$.

(1)求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值；

(2)求$|\vec{a}+\vec{b}|$的值；

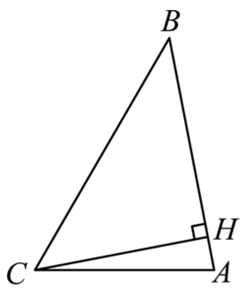
(3)若$(2\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+k\vec{b})$，求实数$k$的值.

10．（2023下·上海嘉定·高一校考期中）已知单位向量$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为α，且$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，向量$\vec{a}=3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$与$\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\beta$.

（1）求$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$；

（2）求$\cos\beta$的值.

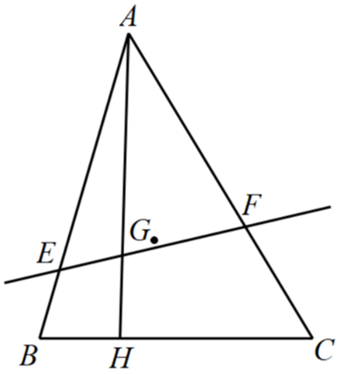
11．（2023下·宁夏银川·高一校考期末）如图，在ΔABC中，已知$CA=2,CB=3,\angle ACB=60°,CH$为$AB$边上的高.



（1）求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；

（2）设$\overrightarrow{CH}=m\overrightarrow{CB}+n\overrightarrow{CA}$，其中$m,n\in R$，求$m,n$的值

12．（2022下·浙江温州·高一校联考期中）如图所示$\triangle ABC$的两边$BC=1$，$AC=2$，设G是$\triangle ABC$的重心，BC边上的高为AH，过G的直线与AB，AC分别交于E，F，已知$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$；



(1)求$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$的值；

(2)若$\cos C=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle AEF}=\frac{9}{20}S_{\triangle ABC}$，$\lambda>\mu$，求$\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{AF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{EA}\right)$的值；

(3)若$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CE}$的最大值为$-\frac{5}{18}$，求边$AB$的长.

题型 4 向量的夹角（夹角的余弦值）问题

13．（2023 下·湖南邵阳·高一校考期末）已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$.

（1）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；

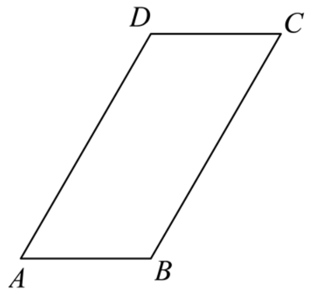
（2）若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为45°，求$|\vec{a}+\vec{b}|$.

14．（2024 上·浙江宁波·高一镇海中学校考期末）单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=-\frac{2}{3}$.

(1)求$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值：

(2)若$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}+3\vec{b}$的夹角为锐角，求实数k的取值范围.

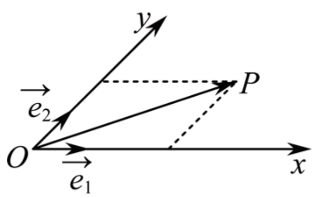
15．（2023 下·高一课时练习）如图，平行四边形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$.



求：（1）$|\overrightarrow{DB}|$；

（2）$\angle CAB$的大小.

16．（2023 下·福建福州·高一校联考期中）如图，设Ox,Oy是平面内相交成θ角的两条数轴，$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$分别是与$x$轴、$y$轴同方向的单位向量．若向量$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则把有序数对$(x,y)$叫做$\overrightarrow{OP}$在斜坐标系$Oxy$中的坐标.

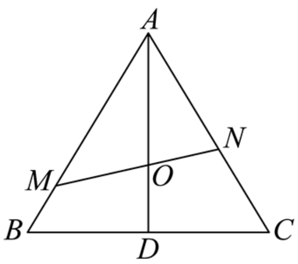


(1)若$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(3,1)$，求$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量斜坐标.

(2)若$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(3,1)$，$\vec{c}=(2,-1),|\vec{c}|\le\sqrt{2}$，求$\cos^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$的最小值.

题型 5 平面向量基本定理的应用

17．（2023 下·浙江台州·高一校联考期中）如图，在边长为 1 的正三角形 ABC 中，D 为 AB 的中点，$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$，过点 O 的直线交边 AB 与点 M，交边 AC 于点 N.

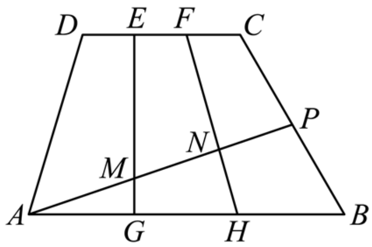


(1)用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AO}$；

(2)若$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，求$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值；

(3)求OM^2+ON^2的取值范围．

18．（2023下·浙江宁波·高一校联考期中）如图，在梯形$ABCD$中，$AD=2$，$DC=CB=3$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，点$E$、$F$是线段$DC$上的两个三等分点，点$G$，点$H$是线段$AB$上的两个三等分点，点$P$是直线$BC$上的一点．

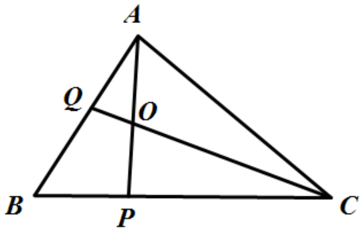


(1)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$的值；

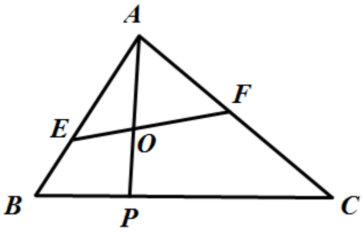
(2)求$\left|\overrightarrow{FH}\right|$的值；

(3)直线AP分别交线段EG、FH于M，N两点，若B、N、D三点在同一直线上，求$\frac{AM}{AN}$的值．

19．（2022下·浙江·高一校联考期中）如图所示，在$\triangle ABC$中，P在线段BC上，满足$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$，$O$是线段$AP$的中点．



（图1）



（图2）

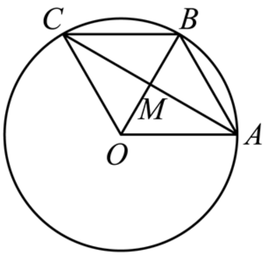
(1)延长CO交AB于点 Q（图 1），求$\frac{AQ}{QB}$的值；

(2)过点O的直线与边AB，AC分别交于点 E，F（图 2），设$\overrightarrow{EB}=\lambda\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FC}=\mu\overrightarrow{AF}$.

（i）求证$2\lambda+\mu$为定值；

（ii）设$\triangle AEF$的面积为S_1，$\triangle ABC$的面积为S_2，求$\frac{S_1}{S_2}$的最小值.

20．（2023 下·福建·高一校联考期中）如图，A，B 是单位圆上的相异两定点（O为圆心），$\angle AOB=\theta$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$），点 C 为单位圆上的动点，线段 AC 交线段OB于点 M（点 M 异于点O、B），记$\triangle AOB$的面积为S.



(1)记$f(\theta)=2S+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$，求$f(\theta)$的表达式；

(2)若$\theta=60°$

①求$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$的取值范围；

②设$\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}(0<t<1)$，记$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|}=g(t)$，求$g(t)$的最小值.

题型 6 平面向量线性运算的坐标表示

21．（2023 下·山东威海·高一统考期末）在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(1，0)$，点B在第二象限，且$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{5}$.

(1)若点B的横坐标为-2，现将向量$\overrightarrow{OB}$绕原点O沿顺时针方向旋转90°到$\overrightarrow{OC}$的位置，求点C的坐标；

(2)已知向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的夹角分别为θ，45°，且$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{10}$，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求$x+y$的值.

22．（2023 下·福建福州·高一校考期中）四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=(6,1)$，$\overrightarrow{BC}=(x,y)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)$．

（1）$\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{DA}$，试求$x$与$y$满足的关系式；

（2）满足（1）的同时又有$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，求$xy$的值和四边形$ABCD$的面积.

23．（2023 下·天津和平·高一校考阶段练习）已知三点 A（2，3），B（5，4），$C(7,10)$，点 P 满足$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(a\in R)$

(1)当 λ 为何值时，点 P 在函数$y=x$的图象上？

(2)若点 P 在第三象限，求实数 λ 的取值范围.

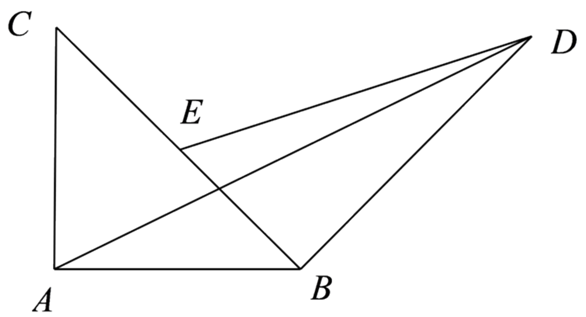
(3)若 Q 在直线 BC 上且$\left|\overrightarrow{BQ}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$，求点 Q 的坐标.

24．（2023 下·全国·高一专题练习）（1）已知向量$\vec{a},\vec{b}$是不共线的两个向量，$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-t\vec{b}$，$\overrightarrow{BP}=-\vec{a}+3\vec{b}$,

$\overrightarrow{BQ} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

. 若$t=-2$，当$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{BP}+y\overrightarrow{BQ}$时，求$x,y$的值.

（2）如图，两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，$\angle ACB=45°,\angle BED=60°$，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x，y 的值.

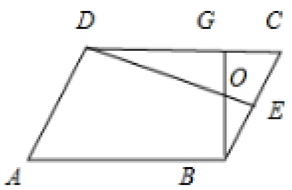


题型 7　向量坐标运算的几何应用

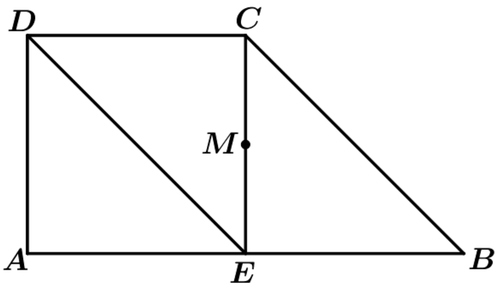
25. （2023 下·重庆万州·高一阶段练习）在平行四边形$ABCD$中，E，G分别是BC，DC上的点且$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$，$DE$与$BG$交于点$O$.

（1）求$\frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{DE}|}$的值；

（2）若平行四边形$ABCD$的面积为 21，求$\triangle BOC$的面积.



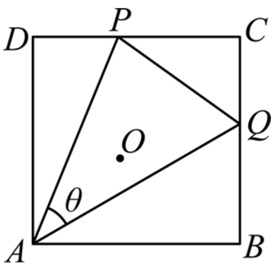
26. （2023 下·高一课时练习）如图，已知直角梯形$ABCD$中，$AD\perp AB,AB=2AD=2CD$，过点 C 作$CE\perp AB$于点 E，M 为CE的中点.



求证：（1）$DE//BC$；

（2）D，M，B 三点共线.

27.（2023 下·浙江·高一湖州中学校联考期中）如图，点P,Q分别是正方形$ABCD$的边DC、CB上两点，$AB=1$，$\angle PAQ=\theta$，记点O为$\triangle APQ$的外心.



(1)若$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CB}$，$0\le\lambda\le1$，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$的值；

(2)若$\theta=45°$，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$的取值范围；

(3)若$\theta=60°$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{AQ}$，求$3x+6y$的最大值.

28．（2023 下·山东青岛·高一校考阶段练习）如图，正方形$ABCD$的边长为 6，E是AB的中点，F是BC边上靠近点B的三等分点，AF与DE交于点M.