浙江省衢州市2023-2024学年高一上学期1月期末数学试题

一、单项选择题：本题共8个小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{-1,0,1\},B=\{-2,-1,2\}$，则$A\cup B=$（　　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$　　C. $\{-2,-1,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

〖答 案〗D

〖解 析〗因为集合$A=\{-1,0,1\},B=\{-2,-1,2\}$，所以$A\cup B=\{-2,-1,0,1,2\}$.

故选：D.

2. “$\ln x\le 0$”是“$x\le 1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

〖答 案〗A

〖解 析〗因为$\ln x\le 0\Leftrightarrow 0<x\le 1$，所以“$\ln x\le 0$”是“$x\le 1$”的充分不必要条件.

故选：A.

3. 已知函数$f(x)=x^3\left(ae^x-e^{-x}\right)$为偶函数，则$a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. e

〖答 案〗C

〖解 析〗因为$f(x)$为偶函数，

所以$f(-x)=(-x)^3\left(ae^{-x}-e^x\right)=f(x)=x^3\left(ae^x-e^{-x}\right)$，

所以$-x^3\left(ae^{-x}-e^x\right)=x^3\left(ae^x-e^{-x}\right)$，所以$x^3\left(ae^x-e^x+ae^{-x}-e^{-x}\right)=0$，

所以$x^3(a-1)\left(e^x+e^{-x}\right)=0$，因为$x^3\left(e^x+e^{-x}\right)$不恒为0，

所以$a-1=0$，所以$a=1$.

故选：C.

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ}=$（　　）

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

〖答 案〗D

〖解 析〗$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\dfrac{2\sin\left(60^\circ-20^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}=4$.

故选：D

5. 已知$\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则$\cos\beta=$（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

〖答 案〗C

〖解 析〗因为$\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha+\beta\in\left(0,\pi\right)$，

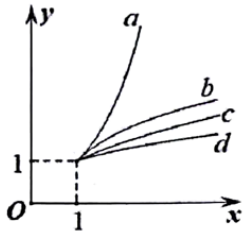
因此$\sin^2\left(\alpha+\beta\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\sqrt{1-\sin\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

于是有$\cos\beta=\cos\left[\left(\alpha+\beta\right)-\alpha\right]=\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\alpha+\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\alpha$

$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

6. 函数$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}},g\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}},h\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-1},t\left(x\right)=\ln x+1$在$\left[1,+\infty\right)$的图象如图所示，则曲线$a,b,c,d$对应的函数分别为（　　）



A. $h\left(x\right),f\left(x\right),t\left(x\right),g\left(x\right)$　　B. $h\left(x\right),t\left(x\right),f\left(x\right),g\left(x\right)$

C. $h\left(x\right),t\left(x\right),g\left(x\right),f\left(x\right)$　　D. $t\left(x\right),h\left(x\right),f\left(x\right),g\left(x\right)$

〖答 案〗B

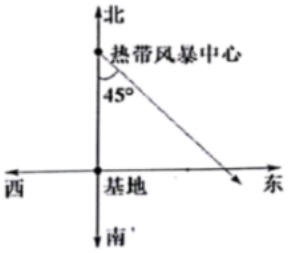
〖解 析〗$f\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},g\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}},h\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1},t\left(\mathrm{e}\right)=2$，

因为$h\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}>2,t\left(\mathrm{e}\right)=2,2>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}>\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$，

所以曲线a,b,c,d对应的函数分别为$h(x),t(x),f(x),g(x)$.

故选：B.

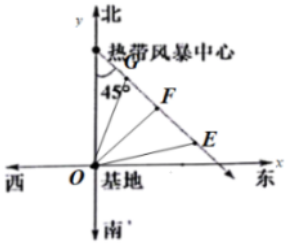
7. 根据气象部门提醒，在距离某基地正北方向588km处的热带风暴中心正以21km/h的速度沿南偏东$45°$方向移动，距离风暴中心441km以内的地区都将受到影响，则该基地受热带风暴中心影响的时长为（　　）



A. 7h　　B. 14h　　C. $\left(14\sqrt{2}-7\right)\text{h}$　　D. $\left(14\sqrt{2}+7\right)\text{h}$

〖答 案〗B

〖解 析〗如图所示建立平面直角坐标系，假设$|OE|=|OG|=441$，$OF\perp EG$，



由题意易知$|OF|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 588=294\sqrt{2}$，则$|GF|=\sqrt{|OG|^2-|OF|^2}=\sqrt{21609}=147$，

所以该基地受热带风暴中心影响的时长$\dfrac{|EG|}{21}=\dfrac{147\times 2}{21}=14$.

故选：B.

8. 已知实数x,y满足$x+\log_2 x=4,y+4^y=\dfrac{3}{2}$，则$x+2y=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

〖答 案〗C

〖解 析〗由$y+4^y=\dfrac{3}{2}$，可得$2y+2\cdot 2^{2y}=3$，则$\left(2y+1\right)+2\cdot 2^{2y}=4$，

可得$\log_2 2^{2y+1}+2^{2y+1}=4$，

因为函数 $f\left(x\right)=x+\log_2 x$ 在定义域上为单调递增函数，

又由 $x+\log_2 x=4$，所以 $x=2^{2y+1}$，可得 $2y+1=\log_2 x$，即 $2y=\log_2 x-1$，

所以 $x+2y=x+\log_2 x-1=4-1=3$.

故选：C.

二、多项选择题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则（　　）

A. 函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 对称

C. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度得到

〖答　案〗AC

〖解　析〗$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；

由 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$ 得 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的所有对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

其中不包含直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$，故 B 不正确；

由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 得 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的所有单调递减区间为：

$\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$，当 $k=0$ 时，$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\subseteq\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$，故 C 正确；

$f\left(x\right)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到，故 D 不正确.

故选：AC.

10. 已知 $a>0,b>0,a+b=3ab$，则（　　）

A. $ab \geq \frac{4}{9}$　　B. $a^2+b^2 \leq \frac{8}{9}$

C. $a+b \geq \frac{4}{3}$　　D. $a+4b \geq 3$

〖答 案〗ACD

〖解 析〗A：因为$a>0,b>0$，所以由$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 3ab \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq \frac{4}{9}$，

当且仅当$a=b=\frac{2}{3}$取等号，因此本选项正确；

B：当$a=\frac{1}{2},b=1$时，显然$a+b=3ab$成立，但是$a^2+b^2 \leq \frac{8}{9}$不成立，因此本选项不正确；

C：因为$a>0,b>0$，所以由$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{3}} \Rightarrow a+b \geq \frac{4}{3}$，

当且仅当$a=b=\frac{2}{3}$取等号，因此本选项正确；

D：因为$a>0,b>0$，所以由$a+b=3ab \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$，

因此有$a+4b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)(a+4b)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right) \geq \frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}\right)=3$，

当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{4b}{a}$时取等号，即$a=\frac{4}{3},b=\frac{2}{3}$，因此本选项正确.

故选：ACD.

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，对任意$x,y \in \mathbf{R}$，都有$2f(x+y)=f(x)f(y)$，当$x>0$时，$f(x)>2$，则（　　）

A. $f(0)=2$　　B. $f(x)$为奇函数

C. $f(x)$的值域为$(0,+\infty)$　　D. $f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

〖答 案〗ACD

〖解 析〗在$2f(x+y)=f(x)f(y)$中，

令$x=y=0$，得$2f(0)=f^2(0) \Rightarrow f(0)=0$，或$f(0)=2$，

在$2f(x+y)=f(x)f(y)$中，令$x=1,y=0$，得$2f(1)=f(1)f(0)$，

因为$x>0$时，$f(x)>2$，所以$f(1)>2$，

显然由$2f(1)=f(1)f(0)\Rightarrow f(0)>0$，因此$f(0)=2$，因此选项 A 正确；

因为$f(0)=2$，所以函数$f(x)$不可能为奇函数，因此选项 B 不正确；

在$2f(x+y)=f(x)f(y)$中，令$y=-x$，

所以有$2f(0)=f(x)f(-x)\Rightarrow f(x)f(-x)=4>0$，

当$x<0$时，所以$-x>0$时，因此由$f(x)f(-x)=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{4}{f(-x)}\in(0,2)$，

而$f(0)=2$，所以$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$，因此选项 C 正确；

设$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},x_1<x_2$，显然$x_2-x_1>0$，即有$f(x_2-x_1)>2$成立，

因为$2f(x+y)=f(x)f(y)$，

所以由$f(x_2-x_1)>2\Rightarrow\dfrac{1}{2}f(x_2)f(-x_1)>2$，而$f(x)f(-x)=4$，

所以由$\dfrac{1}{2}f(x_2)f(-x_1)>2\Rightarrow\dfrac{1}{2}f(x_2)\cdot\dfrac{4}{f(x_1)}>2\Rightarrow\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}>1$，

因为$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$，所以$f(x)>0\Rightarrow f(x_1)>0$，

因此由$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}>1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$，

即$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以选项 D 正确.

故选：ACD.

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x+1}-1,x\le 0\\|\lg x|,x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)-m$，则（　　）

A. 若函数$y=g(x)$有 3 个零点，则$m\in(0,1)$

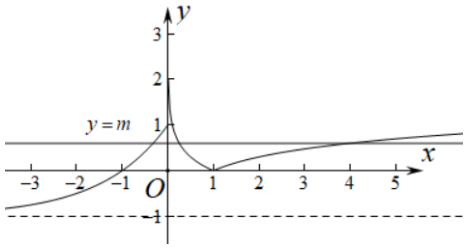
B. 函数$y=f[f(x)]$有 3 个零点

C. $\exists m\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f[g(x)]$有 6 个零点

D. $\forall m\in\mathbf{R}$，函数$y=g[f(x)]$的零点个数都不为 4

〖答　案〗BD

〖解　析〗函数$f(x)$的图象如下图所示：



A：令 $g(x)=f(x)-m=0$，

当函数 $y=g(x)$ 有 3 个零点时，函数 $f(x)$ 与直线 $y=m$ 有三个不同的交点，

由图象可知，$m\in(0,1]$，因此本选项不正确；

B：由函数的图象可知：$f(x)>-1$，

令 $y=f[f(x)]=0$，可解 $f(x)=1$，$f(x)=-1$ 舍去，

当 $f(x)=1$ 时，由图象可知有三个实数解，因此本选项正确；

C：当函数 $y=f[g(x)]$ 有 6 个零点时，此时有 $g(x)=-1, g(x)=1$，

当 $g(x)=-1$ 时，即 $f(x)-m=-1\Rightarrow f(x)=m-1$，

当 $g(x)=1$ 时，$f(x)-m=1\Rightarrow f(x)=m+1$，

由图象可知，函数 $f(x)$ 与直线 $y=m$ 最多有三个不同的交点，

因此要想有函数 $y=f[g(x)]$ 有 6 个零点，必有 $\begin{cases}0<m-1\le 1\\ 0<m+1\le 1\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$，

因此本选项不正确；

D：由 $y=g[f(x)]=f[f(x)]-m=0\Rightarrow f[f(x)]=m$，

令 $f(x)=t$，则 $f(t)=m$，

当 $m>1$ 时，即 $f(t)=m>1\Rightarrow t>1$ 或 $0<t<1$，

当 $t>1$ 时，$f(x)=t$ 有两个不同的实根，

当 $0<t<1$ 时，$f(x)=t$ 有三个不同的实根

所以此时函数 $y=g[f(x)]$ 有五个零点，

当$m=1$时，$f(t)=m=1\Rightarrow t=0$，或$t>1$，或$0<t<1$，

由图象可知此时时函数$y=g\left[f(x)\right]$一共有七个零点，

当$0<m<1$时，$0<f(t)<1\Rightarrow t\in(-1,0)$，或$t\in(0,1)$，或$t>1$，

由图象可知函数$y=g\left[f(x)\right]$此时一共有 6 个零点，

当$m=0$时，$f(t)=0\Rightarrow t=-1$，或$t=1$，

由图象可知函数$y=g\left[f(x)\right]$此时一共有 3 个零点，

当$m<0$时，$f(t)=m\Rightarrow t<-1$，即$f(x)<-1$，此时不等式的解集为空集，

综上所述：$\forall m\in\mathbf{R}$，函数$y=g\left[f(x)\right]$的零点个数都不为 4.

故选：BD.

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\tan125°\sin223°$_____0（填“>”或“<”）.

〖答 案〗>

〖解 析〗因为$125°$是第二象限角，所以$\tan125°<0$；$223°$为第三象限角，所以$\sin223°<0$，

所以$\tan125°\sin223°>0$.

故〖答 案〗为：>.

14. $\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+0.2^0+2^{\log_2 3}=$_____.

〖答 案〗$\frac{5}{2}$

〖解 析〗易知$\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+0.2^0+2^{\log_2 3}=\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}+1+3=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$.

故〖答 案〗为：$\frac{5}{2}$.

15. 已知函数$f(x)=\frac{\sin x+(x+1)^2}{x^2+1}$的最大值为$M$，最小值为$m$，则$M+m=$_____.

〖答 案〗2

〖解 析〗易知 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x+(x+1)^2}{x^2+1}=1+\dfrac{\sin x+2x}{x^2+1}$，

令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1=\dfrac{\sin x+2x}{x^2+1}$，

易知 $y=g\left(x\right)$ 定义域为 R，且 $g\left(-x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{\sin\left(-x\right)-2x}{x^2+1}+\dfrac{\sin x+2x}{x^2+1}=0$，

即 $y=g\left(x\right)$ 是奇函数，

显然 $f\left(x\right)_{\max}-1=g\left(x\right)_{\max}=M-1$，$f\left(x\right)_{\min}-1=g\left(x\right)_{\min}=m-1$，

由奇函数的对称性质易知 $g\left(x\right)_{\min}+g\left(x\right)_{\max}=0\Rightarrow M+m=2$.

故〖答 案〗为：2.

16. 已知 x_1,x_2 为方程 $x^2-\left[\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\left(\alpha+\beta\right)}\right]x+\dfrac{2}{3}=0$ 的两个实数根，且 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$x_1=3x_2$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为_____.

〖答 案〗$12\sqrt{2}$

〖解 析〗因为 x_1,x_2 为方程 $x^2-\left[\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\left(\alpha+\beta\right)}\right]x+\dfrac{2}{3}=0$ 的两个实数根，$x_1=3x_2$，

所以 $\begin{cases}x_1x_2=\dfrac{2}{3}\\x_1=3x_2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\\x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$，$x_1+x_2=\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\left(\alpha+\beta\right)}>0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，则 $\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

则 $\tan\alpha+\tan\beta-\left(1-\tan\alpha\tan\beta\right)\tan\beta=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\tan\alpha+\tan\beta\right)\cdot\tan\beta$，

化简可得 $\left(\tan\alpha-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)\tan^2\beta-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha=0$，由方程有解，可知：

$\Delta=\dfrac{32}{9}\tan^2\alpha-4\tan\alpha\left(\tan\alpha-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)\geq0$，即 $\tan^2\alpha-12\sqrt{2}\tan\alpha\leq0$，

解得：$0\leq\tan\alpha\leq12\sqrt{2}$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为 $12\sqrt{2}$.

故〖答 案〗为：$12\sqrt{2}$.

四、解答题：本题共 6 个小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知集合$U=\mathbf{R}, A=\{x|1-a\le x\le 1+2a\}, B=\{x|\ x^2+x-2\le 0\}$.

（1）若$a=1$，求$A\cap(\complement_U B)$；

（2）若$A\cup B=A$，求实数a的取值范围.

解：（1）$B=\{x|\ x^2+x-2\le 0\}=[-2,1]$，

若$a=1$，则$A=[0,3], \complement_U B=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$，

所以$A\cap(\complement_U B)=(1,3]$.

（2）由$A\cup B=A$知$B\subseteq A$，所以$\begin{cases}1-a\le -2\\ 1+2a\ge 1\end{cases}$，得$a\ge 3$.

18. 在平面直角坐标系中，角α的顶点与原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，且$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$，终边上有两点$A(-1,a), B(-2,b)$.

（1）求$|a-b|$的值；

（2）若$\alpha\in(0,\pi)$，求$\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)(1+\sin 2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$的值.

解：（1）法一：因为$\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$，所以$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$\dfrac{|a-b|}{|-1-(-2)|}=|\tan\alpha|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$|a-b|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

法二：由三角函数的定义可知：$\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+1}}=-\dfrac{2}{3}, \cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{b^2+4}}=-\dfrac{2}{3}$，

所以$a^2=\dfrac{5}{4}, b^2=5$，

易知a,b同号，则$a=\frac{\sqrt{5}}{2},b=\sqrt{5}$或$a=-\frac{\sqrt{5}}{2},b=-\sqrt{5}$，

所以$|a-b|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（2）因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)(1+\sin 2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1+2\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

$=\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{5-2\sqrt{5}}{9}$.

19. 某汽车公司生产某品牌汽车的固定成本为48亿元，每生产1万台汽车还需投入2亿元，设该公司一年内共生产该品牌汽车x万台并全部销售完，每万台的销售额为$R(x)$亿元，且

$$R(x)=\begin{cases}10-\frac{x}{10},0<x\le 50,\\ \frac{394}{x}-\frac{7200}{x^2},x>50.\end{cases}$$

（1）写出年利润W（亿元）关于年产量x（万台）的函数〖解 析〗式；

（2）当年产量为多少万台时，该公司在该品牌汽车的生产中所获得的利润最大？并求出最大利润.

解：（1）当$0<x\le 50,W=\left(10-\frac{1}{10}x\right)x-2x-48=-\frac{1}{10}x^2+8x-48$，

当$x>50,W=\left(\frac{394}{x}-\frac{7200}{x^2}\right)x-2x-48=346-\left(2x+\frac{7200}{x}\right)$，

所以$W=\begin{cases}-\frac{1}{10}x^2+8x-48,0<x\le 50,\\ 346-\left(2x+\frac{7200}{x}\right),x>50\end{cases}$.

（2）当$0<x\le 50,W=-\frac{1}{10}x^2+8x-48$，对称轴为$x=40$，且开口向下，

当$x=40$时，W最大，最大利润为$W(40)=112$；

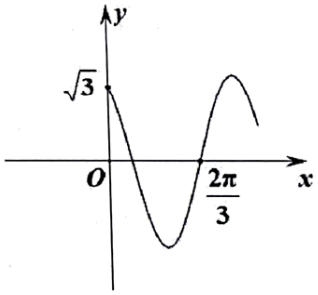
当$x>50, W=346-\left(2x+\dfrac{7200}{x}\right)\le 346-2\sqrt{2x\cdot\dfrac{7200}{x}}=106$，

当$2x=\dfrac{7200}{x}$时，即$x=60$时， 此时W最大为106，

因为$106<112$，所以当年产量为40万台时，

该公司在该品牌汽车的生产中所获得的利润最大，最大利润为112亿元.

20. 函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



（1）求函数$f(x)$的〖解 析〗式；

（2）求函数$g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)f\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的值域.

解：（1）由$f(0)=\sqrt{3}$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，则$2\cos\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

由$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$，得$\dfrac{2\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)\Rightarrow\omega=\dfrac{3k}{2}+\dfrac{1}{2}(k\in Z)$，

设$f(x)$的周期为T，则有$\dfrac{1}{2}T<\dfrac{2\pi}{3}<T\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\omega}\times\dfrac{1}{2}<\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{2\pi}{\omega}>\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow 3>\omega>\dfrac{3}{2}$，

所以令$k=1\Rightarrow\omega=2$，所以$f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（2）$g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\cdot f\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)=4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)$，

$g(x)=4\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)$

$=4\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\frac{5\pi}{6}\le 4x+\frac{5\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}$，

则 $\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，故 $g(x)$ 的值域为 $[-2,1]$.

21. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{2}x+2,x\le 0\\ x+\frac{a}{x},x>0\end{cases}$.

（1）若函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

（2）若不等式 $f(x)\ge\left|\frac{1}{2}x+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\in\left[\frac{31}{16},+\infty\right)$，

若 $a\ge 0$，则 $y=x+\frac{a}{x}>0(x>0)$，显然不符合题意，

若 $a<0$，则 $y=x+\frac{a}{x}(x>0)$ 单调递增，

且 $x\to 0$ 时，$y\to-\infty$，符合题意，故 $a<0$.

（2）先考虑 $f(x)\ge\left|\frac{1}{2}x+a\right|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

①若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,\sqrt{-a}\right)$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}<0$，不满足题意；

②若 $a=0,f(x)=x+\frac{a}{x}=x\ge\frac{1}{2}x=\left|\frac{1}{2}x+a\right|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，满足题意；

③若 $a>0,f(x)\ge\left|\frac{1}{2}x+a\right|=\frac{1}{2}x+a\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}-a\ge 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}-a,x\in(0,+\infty)$，则只需 $g(x)_{\min}\ge 0$，

由于 $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}-a\ge 2\sqrt{\frac{a}{2}}-a$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/668117002133006054