

湖北省武汉钢铁集团公司第三子弟中学 2022-2023 学年高三下学期期末教学统一检测

试题数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学, 物理, 化学, 生物四科竞赛, 其中甲不能参加生物竞赛, 则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是 C 的右支上一点, 连接 PF_1 与 y 轴交于点 M , 若 $|F_1O| = 2|OM|$ (O 为坐标原点), $PF_1 \perp PF_2$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm \sqrt{2}x$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 分别为 AB, AC 的中点, P 为 EF 上的任一点, 实数 x, y 满足 $\vec{PA} + x\vec{PB} + y\vec{PC} = \vec{0}$, 设 $\triangle ABC, \triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ 的面积分别为 S, S_1, S_2, S_3 , 记 $\frac{S_i}{S} = \lambda_i (i=1, 2, 3)$, 则 $\lambda_2 \cdot \lambda_3$ 取到最大值时, $2x + y$ 的值为 ()

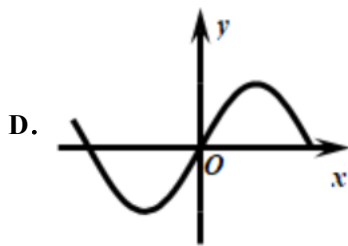
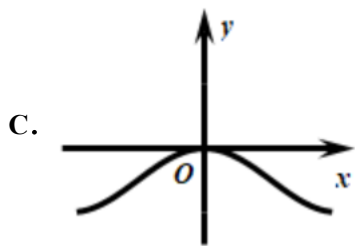
- A. -1 B. 1 C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

4. 在复平面内, 复数 $i(2+i)$ 对应的点的坐标为 ()

- A. (1, 2) B. (2, 1) C. (-1, 2) D. (2, -1)

5. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1 \right) \cos x$ 图象的大致形状是 ()





6. 集合 $\left\{x \in N^* \mid \frac{12}{x} \in Z\right\}$ 中含有的元素个数为 ()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

7. 2019 年 10 月 17 日是我国第 6 个“扶贫日”，某医院开展扶贫日“送医下乡”医疗义诊活动，现有五名医生被分配到四所不同的乡镇医院中，医生甲被指定分配到医院 A，医生乙只能分配到医院 A 或医院 B，医生丙不能分配到医生甲、乙所在的医院，其他两名医生分配到哪所医院都可以，若每所医院至少分配一名医生，则不同的分配方案共有 ()

- A. 18 种 B. 20 种 C. 22 种 D. 24 种

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零，且 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$ 构成新的等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若存在 n 使得

$S_n = 0$ ，则 $n =$ ()

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

9. 若复数 $z = 1 + \frac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数的模为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 4 C. 2 D. $\sqrt{5}$

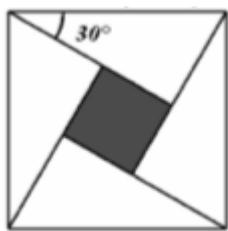
10. 已知全集 $U = Z, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x \mid (x+1)(x-3) > 0, x \in Z\}$ ，则集合 $A \cap (C_U B)$ 的子集个数为 ()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

11. 为得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图像 ()

- A. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位 B. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位 D. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

12. 如图所示，三国时代数学家在《周脾算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明.图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一个内角为 30° ，若向弦图内随机抛掷 200 颗米粒（大小忽略不计，取 $\sqrt{3} \approx 1.732$ ），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为 ()



- A. 20 B. 27 C. 54 D. 64

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 圆 $C: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 关于直线 $y = 2x - 1$ 的对称圆的方程为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $c = 2, 2\sin A = \sin C$. 若 B 为钝角， $\cos 2C = -\frac{3}{4}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

15. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A, B 两点若 $\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FA}$ ，则 C 的离心率为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\cos B + \sqrt{3}\sin B - 2 = 0$ ；且 $b = 1$ ，则 $\triangle ABC$ 周长的范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 记函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| + |2x - 1|$ 的最小值为 m .

(1) 求 m 的值；

(2) 若正数 a, b, c 满足 $abc = m$ ，证明： $ab + bc + ca \geq \frac{9}{a + b + c}$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 若 $x_1 \neq x_2$ ，且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，求证： $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ ；

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ ，求 $ab + b$ 的最大值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ ， $g(x) = \ln x - a (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值；

(2) 若存在与函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的图象都相切的直线，求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2) 设函数 $f(x)$ 的极值点为 x_0 ，当 a 变化时，点 $(x_0, f(x_0))$ 构成曲线 M ，证明 过原点的任意直线 $y = kx$ 与曲线 M 有且仅有一个公共点.

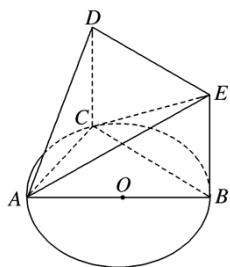
21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，与 x 轴负半轴交于 $A(-2, 0)$ ，离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 两点，连接 AM ， AN 并延长交直线 $x = 4$ 于

$E(x_3, y_3)$ ， $F(x_4, y_4)$ 两点，已知 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$ ，求证：直线 MN 恒过定点，并求出定点坐标.

22. (10 分) 如图， $\triangle ABC$ 内接于圆 O ， AB 是圆 O 的直径，四边形 $DCBE$ 为平行四边形， $DC \perp$ 平面 ABC ， $AB = 4$ ， $EB = 2\sqrt{3}$.



(1) 求证： $DE \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AC = x$ ， $V(x)$ 表示三棱锥 $B-ACE$ 的体积，求函数 $V(x)$ 的解析式及最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案.

综上所述，所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题。

2. C

【解析】

利用三角形 $\triangle OMF_1$ 与 $\triangle PF_2F$ 相似得 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，结合双曲线的定义求得 a, b, c 的关系，从而求得双曲线的渐近线方程。

【详解】

设 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ，

由 $|F_1O| = 2|OM|$ ， $\triangle OMF_1$ 与 $\triangle PF_2F$ 相似，

所以 $\frac{|F_1O|}{|OM|} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2$ ，即 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，

又因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，

所以 $|PF_1| = 4a$ ， $|PF_2| = 2a$ ，

所以 $4c^2 = 16a^2 + 4a^2$ ，即 $c^2 = 5a^2$ ， $b^2 = 4a^2$ ，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查双曲线几何性质、渐近线方程求解，考查数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力。

3. D

【解析】

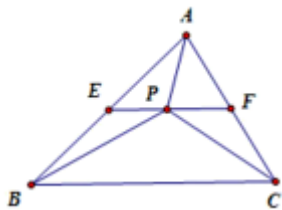
根据三角形中位线的性质，可得 P 到 BC 的距离等于 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高的一半，从而得到 $S_1 = \frac{1}{2}S = S_2 + S_3$ ，由此

结合基本不等式求最值，得到当 $\lambda_2 \cdot \lambda_3$ 取到最大值时， P 为 EF 的中点，再由平行四边形法则得出

$\vec{PA} + \frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}\vec{PC} = \vec{0}$ ，根据平面向量基本定理可求得 $x = y = \frac{1}{2}$ ，从而可求得结果。

【详解】

如图所示：



因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

所以 P 到 BC 的距离等于 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高的一半,

$$\text{所以 } S_1 = \frac{1}{2}S = S_2 + S_3,$$

$$\text{由此可得 } \lambda_2 \lambda_3 = \frac{S_2}{S} \times \frac{S_3}{S} = \frac{S_2 S_3}{S^2} \leq \frac{\left(\frac{S_2 + S_3}{2}\right)^2}{S^2} = \frac{1}{16},$$

当且仅当 $S_2 = S_3$ 时, 即 P 为 EF 的中点时, 等号成立,

$$\text{所以 } \vec{PE} + \vec{PF} = \vec{0},$$

$$\text{由平行四边形法则可得 } \vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PE}, \quad \vec{PA} + \vec{PC} = 2\vec{PF},$$

$$\text{将以上两式相加可得 } 2\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 2(\vec{PE} + \vec{PF}) = \vec{0},$$

$$\text{所以 } \vec{PA} + \frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}\vec{PC} = \vec{0},$$

$$\text{又已知 } \vec{PA} + x\vec{PB} + y\vec{PC} = \vec{0},$$

$$\text{根据平面向量基本定理可得 } x = y = \frac{1}{2},$$

$$\text{从而 } 2x + y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查了向量加法的平行四边形法则, 考查了平面向量基本定理的应用, 考查了基本不等式求最值, 属于中档题.

4. C

【解析】

利用复数的运算法则、几何意义即可得出.

【详解】

解: 复数 $i(2+i) = 2i - 1$ 对应的点的坐标为 $(-1, 2)$,

故选: C

【点睛】

本题考查了复数的运算法则、几何意义, 考查了推理能力与计算能力, 属于基础题.

5. B

【解析】

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 可排除 A、C, 再判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上函数值与 0 的大小, 即可得出答案.

【详解】

解: 因为 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos x$,

所以 $f(-x) = \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \cos(-x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cos x = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cos x = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 可排除 A、C;

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) < 0$, 可排除 D;

故选: B.

【点睛】

本题考查函数表达式判断函数图像, 属于中档题.

6. B

【解析】

解: 因为 $\left\{x \in N^* \mid \frac{12}{x} \in Z\right\}$ 集合中的元素表示的是被 12 整除的正整数, 那么可得为 1, 2, 3, 4, 6, 12 故选 B

7. B

【解析】

分两类: 一类是医院 A 只分配 1 人, 另一类是医院 A 分配 2 人, 分别计算出两类的分配种数, 再由加法原理即可得到答案.

【详解】

根据医院 A 的情况分两类:

第一类: 若医院 A 只分配 1 人, 则乙必在医院 B, 当医院 B 只有 1 人, 则共有 $C_3^2 A_2^2$ 种不同

分配方案, 当医院 B 有 2 人, 则共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案, 所以当医院 A 只分配 1 人时,

共有 $C_3^2 A_2^2 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案;

第二类: 若医院 A 分配 2 人, 当乙在医院 A 时, 共有 A_3^3 种不同分配方案, 当乙不在 A 医院,

在 B 医院时, 共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案, 所以当医院 A 分配 2 人时,

共有 $A_3^3 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案;

共有 20 种不同分配方案.

故选: B

【点睛】

本题考查排列与组合的综合应用, 在做此类题时, 要做到分类不重不漏, 考查学生分类讨论的思想, 是一道中档题.

8. D

【解析】

利用等差数列的通项公式可得 $a_1 = -6d$, 再利用等差数列的前 n 项和公式即可求解.

【详解】

由 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$ 构成等差数列可得

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3}$$

$$\text{即 } \frac{a_1 - a_3}{a_1 a_3} = \frac{a_3 - a_4}{a_3 a_4} \Rightarrow \frac{-2d}{a_1} = \frac{-d}{a_4} \Rightarrow a_1 = 2a_4$$

$$\text{又 } a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 2(a_1 + 3d)$$

$$\text{解得: } a_1 = -6d$$

$$\text{又 } S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} (-12d + (n-1)d) = \frac{n}{2} d(n-13)$$

所以 $S_n = 0$ 时, $n = 13$.

故选: D

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、等差数列的前 n 项和公式, 需熟记公式, 属于基础题.

9. D

【解析】

由复数的综合运算求出 z , 再写出其共轭复数, 然后由模的定义计算模.

【详解】

$$Q \ z = 1 + \frac{2i}{1+i} = 1 + \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2+i, \therefore \bar{z} = 2-i, \therefore |\bar{z}| = \sqrt{5}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的运算，考查共轭复数与模的定义，属于基础题.

10. C

【解析】

先求 B.再求 $C_U B$ ，求得 $A \cap (C_U B)$ 则子集个数可求

【详解】

由题 $C_U B = \{x | (x+1)(x-3) \leq 0, x \in Z\} = \{x | -1 \leq x \leq 3, x \in Z\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，则集合 $A \cap (C_U B) = \{1, 2, 3\}$ ，故其

子集个数为 $2^3 = 8$

故选 C

【点睛】

此题考查了交、并、补集的混合运算及子集个数，熟练掌握各自的定义是解本题的关键，是基础题

11. D

【解析】

$y = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x + \frac{5\pi}{6}) = \sin 2(x + \frac{5\pi}{12})$ ，所以要的函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位得到，故选 D

12. B

【解析】

设大正方体的边长为 x ，从而求得小正方体的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}x$ ，设落在小正方形内的米粒数大约为 N ，利用概率模拟列方程即可求解。

【详解】

设大正方体的边长为 x ，则小正方体的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}x$ ，

设落在小正方形内的米粒数大约为 N ，

$$\text{则 } \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}x\right)^2}{x^2} = \frac{N}{200}, \text{ 解得: } N \approx 27$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了概率模拟的应用，考查计算能力，属于基础题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x-3)^2 + y^2 = 4$

【解析】

求出圆心关于直线的对称点，即可得解.

【详解】

$C: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的圆心为 $(-1, 2)$ ，关于 $y = 2x - 1$ 对称点设为 (x, y) ，

$$\text{则有: } \begin{cases} \frac{y+2}{2} = 2 \times \frac{x-1}{2} - 1 \\ \frac{y-2}{x+1} = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases},$$

所以对称后的圆心为 $(3, 0)$ ，故所求圆的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

故答案为： $(x-3)^2 + y^2 = 4$

【点睛】

此题考查求圆关于直线的对称圆方程，关键在于准确求出圆心关于直线的对称点坐标.

14. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

【解析】

转化 $2\sin A = \sin C$ 为 $a = \frac{c}{2}$ ，利用二倍角公式可求解得 $\cos C$ ，结合余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 可得 b ，再利用面积公式可得解.

【详解】

因为 $c = 2, 2\sin A = \sin C$ ，

所以 $a = \frac{c}{2} = 1$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/668121015051006137>