

# 江苏省太湖高级中学 2023-2024 学年高三最后一卷数学试卷

## 注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

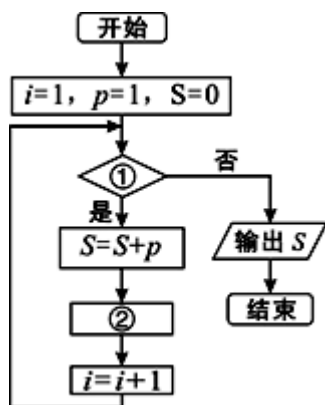
1. 若复数  $z$  满足  $z = (2+i)(1-i)$  ( $i$  是虚数单位)，则  $|z| =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       B.  $\sqrt{10}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D.  $\sqrt{5}$

2. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，函数  $f(x) = \begin{cases} \log_a x + a, & x > 0 \\ 3^{x+1} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若  $f(a) = 3$ ，则  $f(-a) =$  ( )

- A. 2      B.  $\frac{2}{3}$       C.  $-\frac{2}{3}$       D.  $-\frac{8}{9}$

3. 给出 50 个数 1, 2, 4, 7, 11, L, 其规律是：第 1 个数是 1，第 2 个数比第 1 个数大 1，第 3 个数比第 2 个数大 2，第 4 个数比第 3 个数大 3，以此类推，要计算这 50 个数的和。现已给出了该问题算法的程序框图如图，请在图中判断框中的①处和执行框中的②处填上合适的语句，使之能完成该题算法功能( )



- A.  $i \leq 50$ ;  $p = p + i$       B.  $i < 50$ ;  $p = p + i$   
 C.  $i \leq 50$ ;  $p = p + 1$       D.  $i < 50$ ;  $p = p + 1$

4. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点为  $F_1, F_2$ ，一条渐近线方程为  $l: y = -\frac{b}{a}x$ ，过点  $F_1$  且与  $l$  垂直的直线分别交双曲线的左支及右支于  $P, Q$ ，满足  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$ ，则该双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{10}$       B. 3      C.  $\sqrt{5}$       D. 2

5. 已知平面  $\alpha$  和直线  $a, b$ ，则下列命题正确的是 ( )

A. 若  $a \parallel b$ ,  $b \parallel \alpha$ , 则  $a \parallel \alpha$

B. 若  $\overset{\cdot}{a} \perp \overset{\cdot}{b}$ ,  $b \perp \alpha$ , 则  $a \parallel \alpha$

C. 若  $a \parallel b$ ,  $b \perp \alpha$ , 则  $a \perp \alpha$

D. 若  $\overset{\cdot}{a} \perp \overset{\cdot}{b}$ ,  $b \parallel \alpha$ , 则  $a \perp \alpha$

6. 设直线  $l$  过点  $A(0, -1)$ , 且与圆  $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$  相切于点  $B$ , 那么  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$  ( )

A.  $\pm 3$

B. 3

C.  $\sqrt{3}$

D. 1

7. 已知  $\triangle ABC$  是边长为 3 的正三角形, 若  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ , 则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$

A.  $-\frac{3}{2}$

B.  $\frac{15}{2}$

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{15}{2}$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2 (a > 0)$ . 若存在实数  $x_0 \in (-1, 0)$ , 且  $x_0 \neq -\frac{1}{2}$ , 使得  $f(x_0) = f(-\frac{1}{2})$ , 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

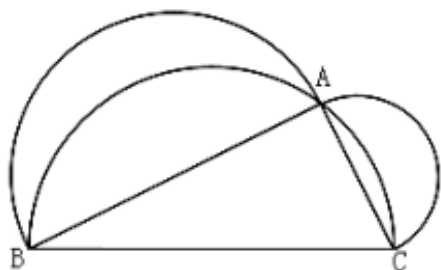
A.  $(\frac{2}{3}, 5)$

B.  $(\frac{2}{3}, 3) \cup (3, 5)$

C.  $(\frac{18}{7}, 6)$

D.  $(\frac{18}{7}, 4) \cup (4, 6)$

9. 下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形, 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形  $ABC$  的斜边  $BC$ 、直角边  $AB$ 、 $AC$ , 已知以直角边  $AC$ 、 $AB$  为直径的半圆的面积之比为  $\frac{1}{4}$ , 记  $\angle ABC = \alpha$ , 则  $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha =$  ( )



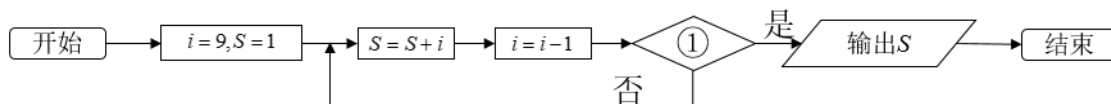
A.  $\frac{3}{5}$

B.  $\frac{4}{5}$

C. 1

D.  $\frac{8}{5}$

10. 如图所示的程序框图, 当其运行结果为 31 时, 则图中判断框①处应填入的是 ( )



A.  $i \leq 3?$

B.  $i \leq 4?$

C.  $i \leq 5?$

D.  $i \leq 6?$

11. 已知向量  $\vec{a} = (1, -2)$ ,  $\vec{b} = (3, -1)$ , 则 ( )

A.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$

C.  $\vec{a} \parallel (\vec{a} - \vec{b})$

D.  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$

12. 一个圆锥的底面和一个半球底面完全重合, 如果圆锥的表面积与半球的表面积相等, 那么这个圆锥轴截面底角的大小是 ( )

- A.  $15^\circ$                       B.  $30^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $60^\circ$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知数列  $\{a_n\}$  满足: 点  $(n, a_n)$  在直线  $2x - y + 1 = 0$  上, 若使  $a_1, a_4, a_m$  构成等比数列, 则  $m =$  \_\_\_\_\_

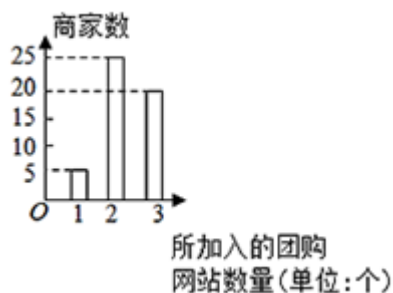
14. 已知圆柱的两个底面的圆周在同一个球的球面上, 圆柱的高和球半径均为 2, 则该圆柱的底面半径为 \_\_\_\_\_.

15. 现有 5 人要排成一排照相, 其中甲与乙两人不相邻, 且甲不站在两端, 则不同的排法有 \_\_\_\_\_ 种. (用数字作答)

16. 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x + y \geq 1, \\ 2x + y \leq 2, \end{cases}$  则  $z = x - y$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 团购已成为时下商家和顾客均非常青睐的一种省钱、高校的消费方式, 不少商家同时加入多家团购网. 现恰有三个团购网站在  $A$  市开展了团购业务,  $A$  市某调查公司为调查这三家团购网站在本市的开展情况, 从本市已加入了团购网站的商家中随机地抽取了 50 家进行调查, 他们加入这三家团购网站的情况如下图所示.



- (1) 从所调查的 50 家商家中任选两家, 求他们加入团购网站的数量不相等的概率;
- (2) 从所调查的 50 家商家中任取两家, 用  $\xi$  表示这两家商家参加的团购网站数量之差的绝对值, 求随机变量  $\xi$  的分布列和数学期望;
- (3) 将频率视为概率, 现从  $A$  市随机抽取 3 家已加入团购网站的商家, 记其中恰好加入了两个团购网站的商家数为  $\eta$ , 试求事件“ $\eta \geq 2$ ”的概率.

18. (12 分) 选修 4-2: 矩阵与变换 (本小题满分 10 分)

已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ( $k \neq 0$ ) 的一个特征向量为  $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ -1 \end{bmatrix}$ ,

$A$  的逆矩阵  $A^{-1}$  对应的变换将点  $(3, 1)$  变为点  $(1, 1)$ . 求实数  $a, k$  的值.

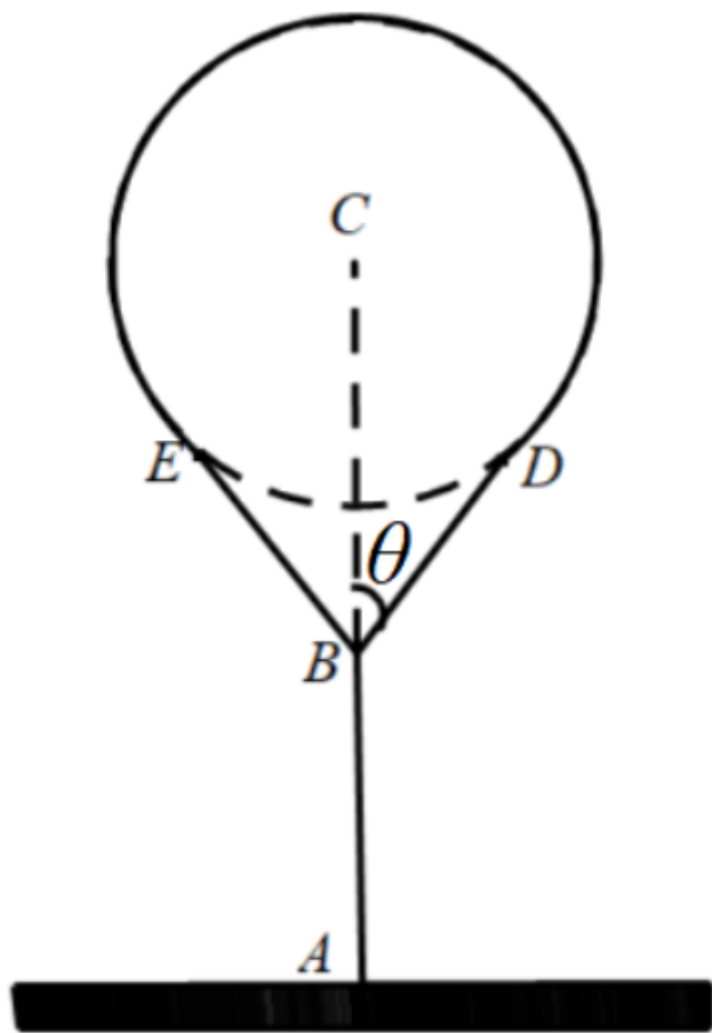
19. (12 分) 在锐角三角形  $ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\tan A, \tan B, \tan C$  成等差数列,

$\cos A, \sqrt{\cos C}, \cos B$  成等比数列.

(1) 求  $A$  的值;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为 1, 求  $c$  的值.

20. (12 分) 如图, 湖中有一个半径为 1 千米的圆形小岛, 岸边点  $A$  与小岛圆心  $C$  相距 3 千米, 为方便游人到小岛观光, 从点  $A$  向小岛建三段栈道  $AB$ ,  $BD$ ,  $BE$ , 湖面上的点  $B$  在线段  $AC$  上, 且  $BD$ ,  $BE$  均与圆  $C$  相切, 切点分别为  $D$ ,  $E$ , 其中栈道  $AB$ ,  $BD$ ,  $BE$  和小岛在同一个平面上. 沿圆  $C$  的优弧 (圆  $C$  上实线部分) 上再修建栈道  $DE$ . 记  $\angle CBD$  为  $\theta$ .



(1) 用  $\theta$  表示栈道的总长度  $f(\theta)$ , 并确定  $\sin \theta$  的取值范围;

(2) 求当  $\theta$  为何值时, 栈道总长度最短.

21. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $2c \cos B = 2a + b$ .

(1) 求角  $C$  的大小;

(2) 若函数  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + m\cos 2x (m \in R)$  图象的一条对称轴方程为  $x = \frac{C}{2}$  且  $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{6}{5}$ , 求  $\cos(2\alpha + C)$  的值.

22. (10 分) 已知直线  $y = x - 1$  是曲线  $f(x) = a \ln x$  的切线.

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式,

(2) 若  $t \leq 3 - 4 \ln 2$ , 证明: 对于任意  $m > 0$ ,  $h(x) = mx - \sqrt{x} + f(x) + t$  有且仅有一个零点.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用复数乘法运算化简  $z$ , 由此求得  $|z|$ .

【详解】

依题意  $z = 2 + i - 2i - i^2 = 3 - i$ , 所以  $|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ .

故选: B

【点睛】

本小题主要考查复数的乘法运算, 考查复数模的计算, 属于基础题.

2、C

【解析】

根据分段函数的解析式, 知当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 3^{x+1} - 1$ , 且  $f(x) < 3$ , 由于  $f(a) = 3$ , 则  $f(a) = \log_a a + a = 3$ , 即可求出  $a$ .

【详解】

由题意知:

当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 3^{x+1} - 1$ , 且  $f(x) < 3$

由于  $f(a) = 3$ , 则可知:  $a > 0$ ,

则  $f(a) = \log_a a + a = 3$ ,

$\therefore a = 2$ , 则  $-a = -2$ ,

则  $f(-a) = f(-2) = 3^{-1} - 1 = -\frac{2}{3}$ .

即  $f(-a) = -\frac{2}{3}$ .

故选: C.

【点睛】

本题考查分段函数的应用, 由分段函数解析式求自变量.

3、A

【解析】

要计算这 50 个数的和, 这就需要循环 50 次, 这样可以确定判断语句①, 根据累加最的变化规律可以确定语句②.

【详解】

因为计算这 50 个数的和, 循环变量  $i$  的初值为 1, 所以步长应该为 1, 故判断语句①应为  $i = i + 1$ , 第 1 个数是 1, 第 2 个数比第 1 个数大 1, 第 3 个数比第 2 个数大 2, 第 4 个数比第 3 个数大 3, 这样可以确定语句②为  $p = p + i$ , 故本题选 A.

【点睛】

本题考查了补充循环结构, 正确读懂题意是解本题的关键.

4、A

【解析】

设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 直线  $PQ$  的方程为  $x = \frac{b}{a}y - c$ , 联立方程得到  $y_1 + y_2 = \frac{2ab^3}{(b^2 - a^2)c}$ ,  $y_1y_2 = \frac{a^2b^4}{(b^2 - a^2)c^2}$ ,

根据向量关系化简到  $b^2 = 9a^2$ , 得到离心率.

【详解】

设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 直线  $PQ$  的方程为  $x = \frac{b}{a}y - c$ .

联立  $\begin{cases} x = \frac{b}{a}y - c, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$  整理得  $(b^4 - a^4)y^2 - 2ab^3cy + a^2b^4 = 0$ ,

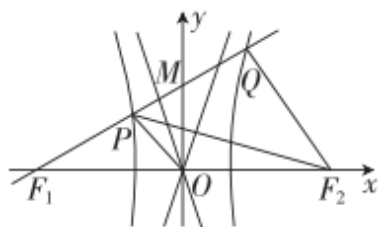
则  $y_1 + y_2 = \frac{2ab^3}{(b^2 - a^2)c}$ ,  $y_1y_2 = \frac{a^2b^4}{(b^2 - a^2)c^2}$ .

因为  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$ ，所以  $P$  为线段  $QF_1$  的中点，所以  $y_2 = 2y_1$ ，

$$\frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 \cdot y_2} = \frac{9}{2} = \frac{4a^2b^6(b^2 - a^2)c^2}{(b^2 - a^2)^2 c^2 a^2 b^4} = \frac{4b^2}{(b^2 - a^2)}, \text{ 整理得 } b^2 = 9a^2,$$

故该双曲线的离心率  $e = \sqrt{10}$ 。

故选：A。



【点睛】

本题考查了双曲线的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力。

5、C

【解析】

根据线面的位置关系，结合线面平行的判定定理、平行线的性质进行判断即可。

【详解】

A：当  $a \subset \alpha$  时，也可以满足  $a \parallel b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确；

B：当  $a \subset \alpha$  时，也可以满足  $a \perp b$ ， $b \perp \alpha$ ，故本命题不正确；

C：根据平行线的性质可知：当  $a \parallel b$ ， $b \perp \alpha$ ，时，能得到  $a \perp \alpha$ ，故本命题是正确的；

D：当  $a \subset \alpha$  时，也可以满足  $a \perp b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确。

故选：C

【点睛】

本题考查了线面的位置关系，考查了平行线的性质，考查了推理论证能力。

6、B

【解析】

过点  $A(0, -1)$  的直线  $l$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$  相切于点  $B$ ，可得  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 。因此

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2, \text{ 即可得出。}$$

【详解】

由圆  $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$  配方为  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ，

$C(0,1)$ ，半径  $r=1$ .

∴过点  $A(0,-1)$  的直线  $l$  与圆  $C: x^2+y^2-2y=0$  相切于点  $B$ ，

∴  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ；

∴  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2 = 3$ ；

故选：B.

【点睛】

本小题主要考查向量数量积的计算，考查圆的方程，属于基础题.

7、A

【解析】

由  $BD = \frac{1}{3}BC$  可得  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ，因为  $\triangle ABC$  是边长为 3 的正三角形，所以

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 = 3 \times 3 \cos 120^\circ + \frac{1}{3} \times 3^2 = -\frac{3}{2}$ ，故选 A.

8、D

【解析】

首先对函数求导，利用导数的符号分析函数的单调性和函数的极值，根据题意，列出参数所满足的不等关系，求得结果.

【详解】

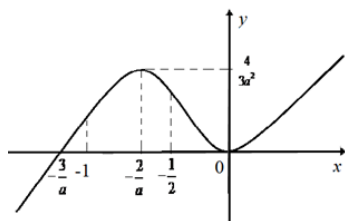
$f'(x) = ax^2 + 2x$ ，令  $f'(x) = 0$ ，得  $x_1 = 0$ ， $x_2 = -\frac{2}{a}$ .

其单调性及极值情况如下：

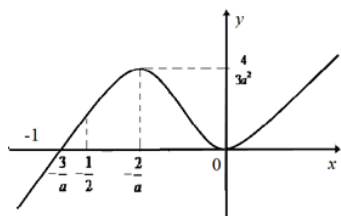
|         |                                      |                |                                |     |                |
|---------|--------------------------------------|----------------|--------------------------------|-----|----------------|
| $x$     | $\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right)$ | $-\frac{2}{a}$ | $\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ | 0   | $(0, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | +                                    | 0              | -                              | 0   | +              |
| $f(x)$  | Z                                    | 极大值            | ]                              | 极小值 | Z              |

若存在  $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ，使得  $f(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{2}{a} < -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{a} > -1 \\ f(-1) < f\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{如图 1}) \text{ 或 } -\frac{3}{a} < -\frac{1}{2} < -\frac{2}{a} \quad (\text{如图 2}).$$



(图 1)



(图 2)

于是可得  $a \in \left(\frac{18}{7}, 4\right) \cup (4, 6)$ ,

故选: D.

#### 【点睛】

该题考查的是有关根据函数值的关系求参数的取值范围的问题, 涉及到的知识点有利用导数研究函数的单调性与极值, 画出图象数形结合, 属于较难题目.

9、D

#### 【解析】

根据以直角边  $AC$ 、 $AB$  为直径的半圆的面积之比求得  $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ , 即  $\tan \alpha$  的值, 由此求得  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值, 进而求得所求表达式的值.

#### 【详解】

由于直角边  $AC$ 、 $AB$  为直径的半圆的面积之比为  $\frac{1}{4}$ , 所以  $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ , 即  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

故选: D

**【点睛】**

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式，考查二倍角公式，属于基础题.

10、C

**【解析】**

根据程序框图的运行，循环算出当  $S = 31$  时，结束运行，总结分析即可得出答案.

**【详解】**

由题可知，程序框图的运行结果为 31，

当  $S = 1$  时， $i = 9$ ；

当  $S = 1 + 9 = 10$  时， $i = 8$ ；

当  $S = 1 + 9 + 8 = 18$  时， $i = 7$ ；

当  $S = 1 + 9 + 8 + 7 = 25$  时， $i = 6$ ；

当  $S = 1 + 9 + 8 + 7 + 6 = 31$  时， $i = 5$  .

此时输出  $S = 31$  .

故选：C.

**【点睛】**

本题考查根据程序框图的循环结构，已知输出结果求条件框，属于基础题.

11、D

**【解析】**

由题意利用两个向量坐标形式的运算法则，两个向量平行、垂直的性质，得出结论.

**【详解】**

$\therefore$  向量  $\vec{a} = (1, -2)$ ， $\vec{b} = (3, -1)$ ， $\therefore \vec{a}$  和  $\vec{b}$  的坐标对应不成比例，故  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不平行，故排除 A；

显然， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 \neq 0$ ，故  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不垂直，故排除 B；

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = (-2, -1)$ ，显然， $\vec{a}$  和  $\vec{a} - \vec{b}$  的坐标对应不成比例，故  $\vec{a}$  和  $\vec{a} - \vec{b}$  不平行，故排除 C；

$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2 + 2 = 0$ ，故  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ，故 D 正确，

故选：D.

**【点睛】**

本题主要考查两个向量坐标形式的运算，两个向量平行、垂直的性质，属于基础题.

12、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/668127033006006063>