教材习题答案

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

6.1.1　向量的实际背景与概念

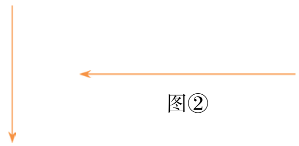
6.1.2　向量的几何表示

6.1.3　相等向量与共线向量

练习

1.解析　悬挂物受到的拉力,摩擦力,加速度.

2.解析　图①中的有向线段表示一个竖直向下、大小为 18 N 的力,图②中的有向线段表示一个水平向左、大小为 28 N 的力.



图②

图①

3.解析　$|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{CD}|=2.5$, $|\overrightarrow{EF}|=3$, $|\overrightarrow{GH}|=2\sqrt{2}$.

4.解析　(1)终点 M、N 的位置相同.

(2)由题意可知,当$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{ON}$同向时,如图 1.

图 1

$\because |\overrightarrow{OM}|=2|\overrightarrow{ON}|=1$, $\therefore |\overrightarrow{MN}|=\dfrac{1}{2}$,

向量$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{ON}$的方向相反.

当$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{ON}$反向时,如图 2.

图 2

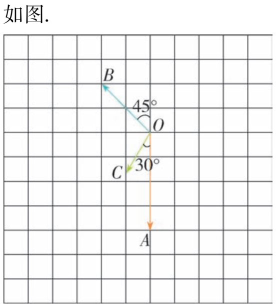
$\because |\overrightarrow{OM}|=2|\overrightarrow{ON}|=1$, $\therefore |\overrightarrow{MN}|=\dfrac{3}{2}$,

向量$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{ON}$的方向相同.

◆习题 6.1

复习巩固

1.解析　如图.



2.解析　与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有$\overrightarrow{CO}$,$\overrightarrow{QP}$,$\overrightarrow{SR}$;

与 $\boldsymbol{b}$ 相等的向量有$\overrightarrow{PM}$,$\overrightarrow{DO}$;

与 $\boldsymbol{c}$ 相等的向量有$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{RQ}$,$\overrightarrow{ST}$.

综合运用

3.答案　(1)×　(2)√　(3)×　(4)×　(5)√　(6)√　理由略.

拓广探索

4.解析　相等的向量共有 24 对.

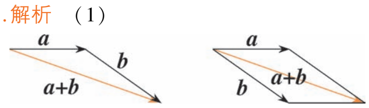
模为 1 的相等向量有 18 对(其中与$\overrightarrow{AM}$同向的共有 6 对,与$\overrightarrow{AM}$反向的也有 6 对,与$\overrightarrow{AD}$同向的共有 3 对,与$\overrightarrow{AD}$反向的也有 3 对);模为$\sqrt{2}$的相等向量有 4 对;模为 2 的相等向量有 2 对.

6.2　平面向量的运算

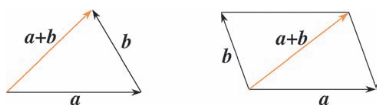
6.2.1　向量的加法运算

练习

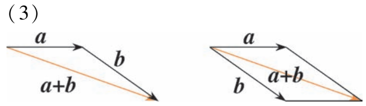
1.解析　(1)



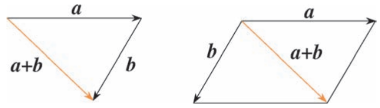
(2)



(3)



(4)

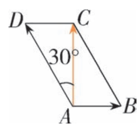


2.解析　当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反时.

3.答案　(1)$\boldsymbol{c}$　(2)$\boldsymbol{f}$　(3)$\boldsymbol{f}$　(4)$\boldsymbol{g}$

4.答案　(1)×　(2)√　(3)×

5.解析　如图,设$\overrightarrow{AD}$表示小船的速度,$\overrightarrow{AB}$表示河水的速度,以$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AB}$为邻边作平行四边形 $ABCD$,则$\overrightarrow{AC}$就是小船实际航行的速度.



由已知条件可得

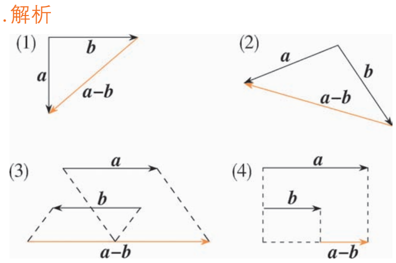
$|\overrightarrow{AC}|=15\cos 30°=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$,

∴ 小船实际航行速度的大小为$\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ km/h,方向与河水的速度间的夹角为 90°.

6.2.2　向量的减法运算

练习

1.解析



2.答案　$\overrightarrow{DB}$;$\overrightarrow{CA}$;$\overrightarrow{AC}$;$\overrightarrow{AD}$;$\overrightarrow{BA}$

3.解析　当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 其中有一个为 $\boldsymbol{0}$ 时,$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 显然成立;

当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线时,作图如图 1 所示,显然$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

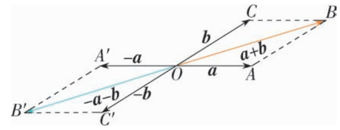


图 1

当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线时,作图如图 2 所示,显然$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

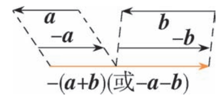
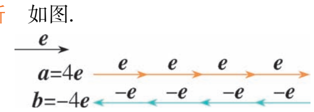


图 2

6.2.3　向量的数乘运算

练习

1.解析　如图.



2.答案　$\dfrac{5}{7}$;$-\dfrac{2}{7}$

3.解析　(1)$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$.　(2)$\boldsymbol{b}=-\dfrac{7}{4}\boldsymbol{a}$.

(3)$\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$.　(4)$\boldsymbol{b}=\dfrac{8}{9}\boldsymbol{a}$.

练习

1.解析　(1)因为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线.

(2)因为 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线.

2.解析　(1)原式$=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

(2)原式$=-\dfrac{11}{12}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

(3)原式$=2y\boldsymbol{a}$.

3.解析　$\because$ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量,

∴ 存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,

即 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$.

$\therefore \begin{cases}2=\lambda,\\ k=-2\lambda,\end{cases}$ $\therefore k=-4$.

6.2.4　向量的数量积

练习

1.解析　$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos 60°=8\times6\times\dfrac{1}{2}=24$.

2.解析　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$.

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时,$\cos A<0$,A 为钝角,$\triangle ABC$ 为钝角三角形;

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,$\cos A=0$,A 为直角,$\triangle ABC$ 为直角三角形.

3.解析　当 $\theta=45°$时,向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos 45°\boldsymbol{e}=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}=3\sqrt{2}\boldsymbol{e}$;

当 $\theta=90°$时,向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos 90°\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$;

当 $\theta=135°$时,向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos 135°\boldsymbol{e}=6\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{e}=-3\sqrt{2}\boldsymbol{e}$.

练习

1.解析　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α.

(1)$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\times2\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,$\therefore (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\sqrt{3}\boldsymbol{c}$.

(2)$\because \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha=2\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$,

$\therefore \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=3\sqrt{2}\boldsymbol{a}$.

2. 证明　$\because \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直,

$\therefore (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$,

即 $|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=0$.

又$\because |\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=1$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

3. 证明　证法一:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}\cdot2\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

证法二:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)-(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

◆习题 6.2

复习巩固

1. 解析　(1)向东走 10 km,再向东走10 km,即向东走 20 km.

(2)向东走 10 km,再向西走 5 km,即向东走 5 km.

(3)向东走 10 km,再向北走 10 km,即向东北走 $10\sqrt{2}$ km.

(4)向西走 5 km,再向南走 5 km,即向西南走 $5\sqrt{2}$ km.

(5)向西走 5 km,再向北走 10 km,再向西走 5 km,即向西北走 $10\sqrt{2}$ km.

(6)向南走 5 km,再向东走 10 km,再向南走 5 km,即向东南走 $10\sqrt{2}$ km.

2. 解析　飞机飞行的路程为 700 km;两次位移的合成是向北偏西约 53°方向飞行 500 km.

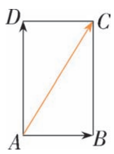
3. 解析　如图,设$\overrightarrow{AD}$表示船垂直于对岸的速度,$\overrightarrow{AB}$表示水流的速度,以 AD、AB 为邻边作▱$ABCD$,则$\overrightarrow{AC}$就是船实际航行的速度,在 Rt△ABC 中,$|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{BC}|=16$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+16^2}=4\sqrt{17}$,

$\tan\angle CAB=4$,

$\therefore \angle CAB\approx76°$.

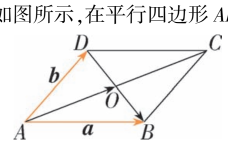
故船实际航行的速度大小为 $4\sqrt{17}$ km/h,方向与水流速度间的夹角约为 76°.



4. 解析　(1)$\mathbf{0}$.　(2)$\overrightarrow{AB}$.　(3)$\overrightarrow{BA}$.　(4)$\mathbf{0}$.

(5)$\mathbf{0}$.　(6)$\overrightarrow{CB}$.　(7)$\mathbf{0}$.

5. 证明　如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,



设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,

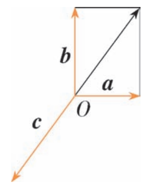
(1)$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

因为$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$,所以$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

(2)$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

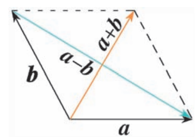
因为$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$,所以$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$.

6. 解析　(1)如图.



(2)不一定能构成三角形.结合向量加法的三角形法则知,当三个非零向量的和为零向量,且这三个向量不共线时,表示这三个向量的有向线段一定能构成三角形.本题不一定能构成三角形.

7. 解析　(1)如图.



(2)当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 成垂直的位置关系时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

8. 解析　(1)$-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.　(2)$10\boldsymbol{a}-22\boldsymbol{b}+10\boldsymbol{c}$.

(3)$3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.　(4)$2(x-y)\boldsymbol{b}$.

9. 证明　因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$,

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

10. 答案　(1)5;1　(2)$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

11. 解析　(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6\sqrt{3}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=25-12\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$.

(2)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{23}$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{35}$.

12. 证明　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

(1)当 $\lambda=0$ 时,等式显然成立.

(2)当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 θ,则

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

所以$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

(3)当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 $180°-\theta$,则

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(180°-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,

$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos(180°-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

所以$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

综合运用

13. 解析　(1)四边形 $ABCD$ 为平行四边形,证明略.

(2)四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明如下:因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以 $AD/\!/BC$,且 $AD\neq BC$,

所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

(3)四边形 $ABCD$ 为菱形.

证明如下:因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

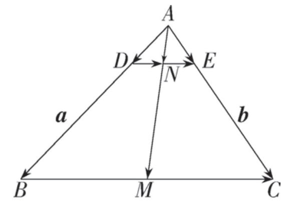
所以 $AB/\!/DC$,且 $AB=DC$,

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,

所以四边形 $ABCD$ 为菱形.

14. 解析　如图,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{DB}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.



15. 证明　$\because \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$,

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$,

$\therefore 2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})$.

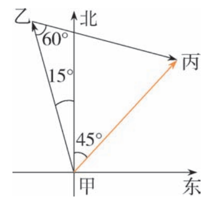
又$\because E$、F 分别为 AD、BC 的中点,

$\therefore \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\mathbf{0}$, $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$,

$\therefore 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$,

即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.

16. 解析　如图,丙地在甲地的北偏东 45°方向,距甲地 1 400 km.



17. 解析　(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

(3)$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\mathbf{0}$.

证明:原式$=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$

$=\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$

$=\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\mathbf{0}$.

18. 解析　$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=61$,于是可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$,

所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,所以 $\theta=120°$.

19. 解析　$\because |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=64+100+160\cos\theta=256$, $\therefore \cos\theta=\frac{23}{40}$, $\therefore \theta\approx55°$.

20. 证明　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

拓广探索

21. A　由 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,得点 O 为 BC 的中点,$\therefore BC$ 为外接圆的直径,

$\therefore \angle BAC=90°$, $OA=OB=OC$.

又$\because |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$, $\therefore$ △ABO 为等边三角形.

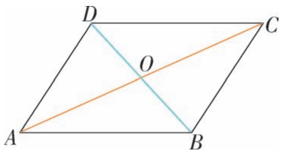
$\therefore B=60°$, $|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$,

$\therefore$ 向量$\overrightarrow{BA}$在向量$\overrightarrow{BC}$上的投影向量为$|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos60°\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

22. 解析　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

23. 解析

(1)



(2)四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

证明:∵ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$,

∴ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,

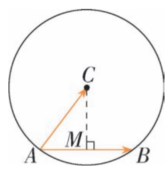
∴ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,

∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

24. 解析 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值只与弦 AB 的长度有关,与圆的半径无关.

如图,取 AB 的中点 M,连接 CM,

则 $CM\perp AB$,$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC$,

$\cos\angle BAC=\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|}$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

练习

1. 解析 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$;

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2. 解析 (1) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DO}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)由(1)得 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$,

∴ $DE=FB$,$DE\parallel FB$.

3. 解析 (1) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

∵ 点 E,F 分别是 AC,BC 的中点,

∴ $EF\parallel AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}AB$,

∴ $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2) CD 与 EF 垂直.

证明:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}|\times\frac{1}{2}=|\boldsymbol{b}|^2$,

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{8}|\boldsymbol{a}|^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2-\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2=0$,

∴ $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{EF}$,即 CD 与 EF 垂直.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

练习

1. 解析 (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,4)+(5,2)=(3,6)$,
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,4)-(5,2)=(-7,2)$.
(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,3)+(-3,8)=(1,11)$,
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,3)-(-3,8)=(7,-5)$.
(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,3)+(-2,-3)=(0,0)$,
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,3)-(-2,-3)=(4,6)$.
(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,0)+(0,4)=(3,4)$,
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,0)-(0,4)=(3,-4)$.

2. 解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(3,4)$,$\overrightarrow{BA}=(-3,-4)$.
(2) $\overrightarrow{AB}=(9,-1)$,$\overrightarrow{BA}=(-9,1)$.
(3) $\overrightarrow{AB}=(0,2)$,$\overrightarrow{BA}=(0,-2)$.
(4) $\overrightarrow{AB}=(5,0)$,$\overrightarrow{BA}=(-5,0)$.

3. 解析 $AB\parallel CD$.
证明:由点 $A(0,1)$,$B(1,0)$,$C(1,2)$,$D(2,1)$,得 $\overrightarrow{AB}=(1,-1)$,$\overrightarrow{CD}=(1,-1)$,所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,所以 $AB\parallel CD$.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

练习

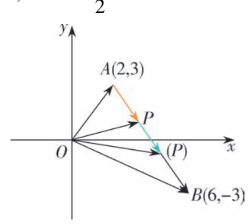
1. 解析 $-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=-2(3,2)+4(0,-1)=(-6,-4)+(0,-4)=(-6,-8)$.
$4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=4(3,2)+3(0,-1)=(12,8)+(0,-3)=(12,5)$.

2. 解析 由已知得 $3x=-12$,∴ $x=-4$.

3. 解析 $\overrightarrow{AB}=(2,2)-(-2,-3)=(4,5)$,
$\overrightarrow{CD}=(-7,-4.5)-(-1,3)=(-6,-7.5)$.
∵ $4\times(-7.5)=5\times(-6)=-30$,
∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线.

4. 解析 (1)由 $A(2,1)$,$B(4,3)$,得线段 AB 的中点坐标为 $(3,2)$.
(2)由 $A(-1,2)$,$B(3,6)$,得线段 AB 的中点坐标为 $(1,4)$.
(3)由 $A(5,-4)$,$B(3,-6)$,得线段 AB 的中点坐标为 $(4,-5)$.

5. 解析 如图,点 P 是线段 AB 的三等分点,有两种情况,即 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$.



当 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ 时,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
$=\left(\frac{2\times2+6}{3},\frac{2\times3-3}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},1\right)$,

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{10}{3},1\right)$.

当 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 时,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$
$=\left(\frac{2+2\times6}{3},\frac{3+2\times(-3)}{3}\right)=\left(\frac{14}{3},-1\right)$,

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{14}{3},-1\right)$.

综上,点 P 是线段 AB 的三等分点时,坐标为 $\left(\frac{10}{3},1\right)$ 或 $\left(\frac{14}{3},-1\right)$.

6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

练习

1. 解析 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{9+16}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-3,4)\cdot(5,2)=-15+8=-7$.

2. 解析 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4)$,$\boldsymbol{c}=(-1,-2)$,
∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-2)+3\times4=8$.
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,7)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,-1)$,
∴ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\times4+7\times(-1)=-7$.
$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(-3,2)$,
∴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=2\times(-3)+3\times2=0$.
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,7)$,∴ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=0^2+7^2=49$.

3. 解析 ∵ $\boldsymbol{a}=(3,2)$,$\boldsymbol{b}=(5,-7)$,
∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+2\times(-7)=1$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$,
∴ $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{74}}$,∴ $\theta\approx88^\circ$.

◆ 习题6.3

复习巩固

1. 解析 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2. 解析 由 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$,$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$,$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$,得 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(3,4)+(2,-5)+(3,1)=(8,0)$,所以作用在原点的合力 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ 的坐标为 $(8,0)$.

3. 解析 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B 的坐标为 (x,y).
(1)由 $(-2,1)=(x,y)$,得点 B 的坐标为 $(-2,1)$.
(2)由 $(1,3)=(x+1,y-5)$,得点 B 的坐标为 $(0,8)$.
(3)由 $(-2,-5)=(x-3,y-7)$,得点 B 的坐标为 $(1,2)$.

4. 解析 由题意知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,设 $D(x,y)$,

则 $\begin{cases}x+1=2,\\y+2=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=5.\end{cases}$

所以点 D 的坐标为 $(1,5)$.

5. 解析 设 A',B' 的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),则 $\overrightarrow{OA'}=(x_1,y_1)$,$\overrightarrow{OB'}=(x_2,y_2)$.
由 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$,得 $(x_1,y_1)=2(1,2)=(2,4)$,
所以点 A' 的坐标为 $(2,4)$.
由 $\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$,得 $(x_2,y_2)=3(-1,3)=(-3,9)$,

所以点 B' 的坐标为 $(-3,9)$.

所以 $\overrightarrow{A'B'}=(-3,9)-(2,4)=(-5,5)$.

6. 解析　由题意得 $\overrightarrow{AB}=(-2,4)$,

所以 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-1,2)$, $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}=(-4,8)$, $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,-2)$, 又 $\overrightarrow{OA}=(1,1)$ (O 为坐标原点), 则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(0,3)$, 所以点 C 的坐标为 $(0,3)$;

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-3,9)$, 所以点 D 的坐标为 $(-3,9)$;

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=(2,-1)$, 所以点 E 的坐标为 $(2,-1)$.

7. 解析　(1) A、B、C 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(1,1.5)$, 所以 $\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{AC}$. 因为直线 AB 与直线 AC 有公共点 A, 所以 A、B、C 三点共线.

(2) P、Q、R 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{PQ}=(1.5,-2)$, $\overrightarrow{PR}=(6,-8)$, 所以 $\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$. 因为直线 PR 与直线 PQ 有公共点 P, 所以 P、Q、R 三点共线.

(3) E、F、G 三点共线.

证明: 因为 $\overrightarrow{EF}=(-8,-4)$, $\overrightarrow{EG}=(-1,-0.5)$, 所以 $\overrightarrow{EF}=8\overrightarrow{EG}$. 因为直线 EF 与直线 EG 有公共点 E, 所以 E、F、G 三点共线.

8. 解析　(1) $\triangle ABC$ 是直角三角形, B 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{BA}=(-6,-6)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,2)$,

由 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$, 得 $BC\perp BA$,

$\therefore B$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形, A 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{AB}=(21,7)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-3)$, 由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 得 $AB\perp AC$, $\therefore A$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形, B 为直角, 图略.

证明: $\overrightarrow{BA}=(-3,3)$, $\overrightarrow{BC}=(5,5)$, 由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 得 $BA\perp BC$, $\therefore B$ 为直角, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

9. 解析　设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$, 则由题意得

$$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ x=\frac{y}{2}.\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{5}}{5},\\ y=\frac{6\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$ 或 $$\begin{cases}x=-\frac{3\sqrt{5}}{5},\\ y=-\frac{6\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

10. 解析　设与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}=(x,y)$,

则 $$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 4x+2y=0,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$ 或 $$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{5}}{5},\\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$$

$\therefore \boldsymbol{e}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\boldsymbol{e}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

综合运用

11. 解析　(1) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

(2) $EF\perp EG$. 证明: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{9}|\boldsymbol{b}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{4}|\boldsymbol{a}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2=0$,

$\therefore \overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EG}$, 即 $EF\perp EG$.

12. 解析　由题意得 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\overrightarrow{AB}=(3,3)$.

当 $t=1$ 时, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(4,5)$, 所以点 P 的坐标为 $(4,5)$;

当 $t=\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,2)+\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$,

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$;

当 $t=-2$ 时, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{AB}=(1,2)-(6,6)=(-5,-4)$, 所以点 P 的坐标为 $(-5,-4)$;

当 $t=2$ 时, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=(1,2)+(6,6)=(7,8)$, 所以点 P 的坐标为 $(7,8)$.

13. 解析　设点 P 的坐标为 (x,y). 由点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$, 得

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}$,

即 $(x-2,y-3)=\frac{3}{2}(x-4,y+3)$,

所以 $$\begin{cases}x-2=\frac{3}{2}(x-4),\\ y-3=\frac{3}{2}(y+3),\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}x=8,\\ y=-15.\end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $(8,-15)$.

14. 证明　因为 $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3,6)$, $\overrightarrow{DC}=(4,-2)$,

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

所以以 $A(1,0)$, $B(5,-2)$, $C(8,4)$, $D(4,6)$ 为顶点的四边形是一个矩形.

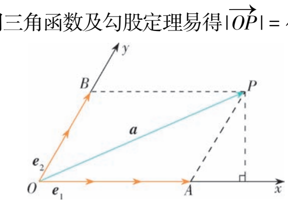
拓广探索

15. 解析　(1) 如图.

$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{e}_2$, $\angle AOB=60°$,

所以 $\angle OAP=120°$, $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$.

利用三角函数及勾股定理易得 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$.



(2) 对于任意向量 $\overrightarrow{OP}$ 都存在唯一一对实数 x, y, 使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,

所以本题中对向量坐标的规定合理.

16. 证明　构造向量 $\boldsymbol{u}=(a,b)$, $\boldsymbol{v}=(c,d)$.

因为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ (其中 θ 为向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 的夹角),

所以 $ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\theta$,

$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)\cos^2\theta\leqslant(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$,

不等式中等号成立的条件是 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 同向或反向.

6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法

练习

1. 证明　已知 $AB=AC$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2$,

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$,

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

又 $\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$,

$\cos C=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}$,

$\therefore \cos B=\cos C$, $\therefore B=C$.

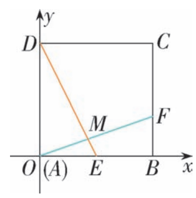
2. 解析　解法一: $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{6}a^2$.

$\therefore \cos\angle EMF=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}a}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

解法二: 建立如图所示的直角坐标系.



则 $A(0,0)$, $D(0,a)$, $E\left(\frac{1}{2}a,0\right)$, $F\left(a,\frac{1}{3}a\right)$,

则 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2}a,-a\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(a,\frac{1}{3}a\right)$,

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{6}a^2$,

$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+(-a)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,

$|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}a$,

$\therefore \cos\angle EMF=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}a}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

3. 解析　$\because$ 点 O 是 BC 的中点,

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{AN}$.

又 $\because M, O, N$ 三点共线,

$\therefore \frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n=1$. $\therefore m+n=2$.

6.4.2 向量在物理中的应用举例

练习

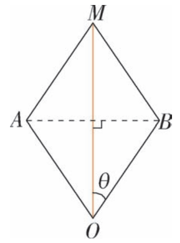
1. 解析　$\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$,

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,-5)\cdot(-13,-15)=4\times(-13)+(-5)\times(-15)=23$.

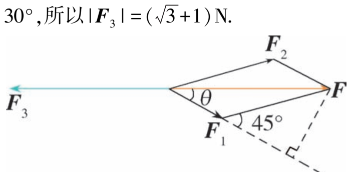
2.解析　由已知得 $OA=OB=4$，$OM=4\sqrt{3}$.

设 $\angle MOB=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \theta=30°$，$\therefore \angle AOB=60°$.



3.解析　(1)如图，设 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 θ，则利用三角函数及勾股定理解图中两个直角三角形易得 $|\boldsymbol{F}|=(\sqrt{3}+1)$N，$\theta=30°$，所以 $|\boldsymbol{F}_3|=(\sqrt{3}+1)$N.



(2)由(1)知 $\theta=30°$，所以 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 $150°$.

6.4.3　余弦定理、正弦定理

练习

1.解析　(1)$a\approx10.5$ cm，$B\approx55.8°$，$C=81.9°$.

(2)由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+2^2-2\times5\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=19$，$\therefore c=\sqrt{19}$.

2.解析　由余弦定理的推论得

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore A=45°$.

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore B=30°$，$\therefore C=105°$.

3.解析　$\because \sin A=\frac{\sqrt{231}}{20}$，$0°<A<90°$，

$\therefore \cos A=\frac{13}{20}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5^2+2^2-2\times5\times2\times\cos A=25+4-20\times\frac{13}{20}=16$，$\therefore a=4$.

由余弦定理的推论得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16+25-4}{2\times4\times5}=0.925$，

$\therefore C\approx22°$.

练习

1.解析　(1)$a\approx18$ cm，$b\approx15$ cm，$C=75°$.

(2)由正弦定理得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{20\times\frac{1}{2}}{11}\approx0.909\ 1$.

$\because a>b$，B 为锐角，

$\therefore A$ 有两解，$A\approx65°$ 或 $A\approx115°$.

当 $A\approx65°$ 时，$C=180°-A-B=85°$，

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}\approx22$ cm.

当 $A\approx115°$ 时，$C=180°-A-B=35°$，

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}\approx13$ cm.

2.解析　(1)由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$，

$\because A=120°$，$\therefore C=30°$，$B=30°$.

$\therefore b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)由正弦定理得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\sin(45°+75°)}=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$.

3.解析　$\because \cos A=\frac{4}{5}$，$\therefore \sin A=\frac{3}{5}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

由正弦定理得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{5}$.

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{3+4\sqrt{3}}{10}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$.

练习

1.解析　在 $\triangle ABS$ 中，$AB=32.2\times0.5=16.1$ (n mile)，$\angle ABS=115°$.

由正弦定理得

$AS=\frac{AB\times\sin\angle ABS}{\sin(65°-20°)}=AB\times\sin\angle ABS\times\sqrt{2}=16.1\times\sin 115°\times\sqrt{2}$(n mile).

S 到直线 AB 的距离

$d=AS\times\sin 20°=16.1\times\sin 115°\times\sqrt{2}\times\sin 20°\approx7.06$(n mile).

因为 $7.06>6.5$，

所以这艘船可以继续沿正北方向航行.

2.证明　在 $\triangle ABP$ 中，$\angle ABP=180°-\gamma+\beta$，$\angle BPA=180°-(\alpha-\beta)-\angle ABP=180°-(\alpha-\beta)-(180°-\gamma+\beta)=\gamma-\alpha$.

在 $\triangle ABP$ 中，根据正弦定理得

$AP=\frac{a\sin(180°-\gamma+\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}=\frac{a\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

所以山高为 $h=AP\times\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

3.解析　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=180°-75°+32°=137°$.

根据余弦定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC}=\sqrt{67.5^2+54^2-2\times67.5\times54\times\cos 137°}\approx113.15$.

根据正弦定理得 $\sin\angle CAB=\frac{BC\sin\angle ABC}{AC}=\frac{54\times\sin 137°}{113.15}\approx0.325\ 5$，

$\therefore \angle CAB=19.0°$，

$\therefore 75°-\angle CAB=56.0°$.

此船应该沿北偏东 $56.0°$ 的方向航行，需要航行 113.15 n mile.

◆习题6.4

复习巩固

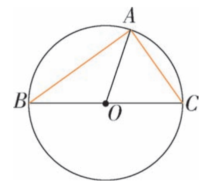
1.D　由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，知 $\angle A$ 的平分线与 BC 边垂直，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，又 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $\angle A=60°$.

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

2.C　若 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心；若 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$，则 N 为 $\triangle ABC$ 的重心；若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心.故选C.

3.证明　如图，BC 为圆的直径.设圆的半径为 r，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2=-r^2-\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+r^2=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.即直径所对的圆周角是直角.



4.解析　(1)$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_B-\boldsymbol{s}_A=(2,10)-(4,3)=(-2,7)$.

(2)设向量 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}_A$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{s}$ 在 $\boldsymbol{s}_A$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{OM}$，与 $\boldsymbol{s}_A$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{s}_A|}$，

$\therefore \overrightarrow{OM}=|\boldsymbol{s}|\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|}\cdot\boldsymbol{e}=\frac{13}{5}\boldsymbol{e}=\left(\frac{52}{25},\frac{39}{25}\right)$.

5.解析　(1)实际前进的速度的大小为 $\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$(km/h)，沿与水流方向成 $60°$ 的方向前进.

(2)设沿与水流方向成 θ 的方向游，则 $\sin(\theta-90°)=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由计算器计算得 $\theta-90°\approx35°$，$\therefore \theta\approx125°$，$\therefore$ 沿与水流方向约成 $125°$ 的方向游.

$v_y=2\sqrt{3}\cdot\cos(\theta-90°)=2\sqrt{2}$(km/h)，实际前进的速度的大小为 $2\sqrt{2}$ km/h.

6.解析　(1)$A\approx49°$，$B=24°$，$c\approx62$ cm.

(2)$A\approx36°$，$B\approx40°$，$C=104°$.

7.解析　(1)$a\approx38$ cm，$b\approx39$ cm，$B=80°$.

(2)$B\approx43°$，$A=114°$，$a\approx35$ cm 或 $B\approx137°$，$A=20°$，$a\approx13$ cm.

8.解析　在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得 $BC=\frac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\frac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AB=BC\tan\angle ACB=\frac{s\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

9.解析　(1)以气象台为坐标原点，正东方向为 x 轴正方向，建立直角坐标系，现在台风中心 B 的坐标为 $(-300,0)$，设 t 小时后台风

中心移到 B',则 B' 的坐标为 $(-300+40t\cos 45°,40t\sin 45°)$,即 $(-300+20\sqrt{2}t,20\sqrt{2}t)$.

因为以台风中心为圆心,以 250 千米为半径的圆上或圆内的点将受台风影响,

所以 $|AB'|\leqslant 250$,即 $(-300+20\sqrt{2}t)^2+(20\sqrt{2}t)^2\leqslant 250^2$,整理得 $16t^2-120\sqrt{2}t+275\leqslant 0$,

解得 $\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leqslant t\leqslant \frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}$,

即 $2.00\leqslant t\leqslant 8.61$.

故大约 2 小时后气象台 A 所在地将遭受台风影响,大约持续 6 小时 37 分钟.

10. 解析 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot ac\sin B$(其中 A,B,C 分别为三角形三个角,a,b,c 为相应对边).

综合运用

11. 解析 (1)设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2)$.

将 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到 $\overrightarrow{AP}$,

相当于沿逆时针方向旋转 $\frac{7}{4}\pi$ 得到 $\overrightarrow{AP}$,又 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-2\sqrt{2})$,

于是 $\overrightarrow{AP}=\left(\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi+2\sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi,\ \sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi-2\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi\right)=(-1,-3)$.

所以 $\begin{cases}x-1=-1,\\y-2=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$

所以 $P(0,-1)$.

12. 解析 $\because \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}),\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=5$,

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{25}{2}-\frac{5}{2}-4\right)=3$.

$\because |\overrightarrow{AM}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2)$

$=\frac{1}{4}\times(25+2\times 5+4)=\frac{39}{4}$,

$\therefore |\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$,

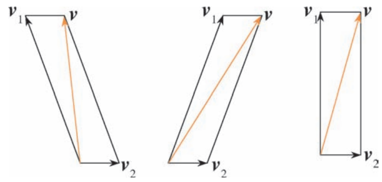
$|\overrightarrow{BN}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{25}{4}-5+4=\frac{21}{4}$,

$\therefore |\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$,

$\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{3}{\frac{\sqrt{39}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

13. 解析 如图,设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ,合速度为 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 α,行驶距离为 l,则 $\sin\alpha=\frac{|\boldsymbol{v}_1|\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{10\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|}$,$l=\frac{0.5}{\sin\alpha}=\frac{|\boldsymbol{v}|}{20\sin\theta}$,$\frac{l}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{20\sin\theta}$.

所以当 $\theta=90°$,即船垂直于对岸行驶时所用时间最短.



14. 解析 由已知,得 $\tan\angle BAC=\frac{250\sqrt{3}}{250}=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle BAC=60°$.

$\therefore$ 合速度的方向为北偏西 60°.

$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2-2\times 2\sqrt{3}\times 6\times\cos 150°}=\sqrt{12+36+36}=2\sqrt{21}$,

此时小货船航行速度的大小为 $2\sqrt{21}$ km/h.

15. 证明 根据余弦定理,得

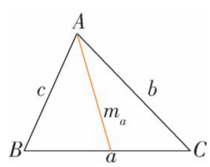
$m_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-2\times\frac{a}{2}\times c\times\cos B$

$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-a\times c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2[a^2+4c^2-2(a^2+c^2-b^2)]$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2[2(b^2+c^2)-a^2]$.

所以 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.



同理,$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$,

$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

16. 证明 根据余弦定理的推论,

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

所以 $c(a\cos B-b\cos A)$

$=c\left(a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

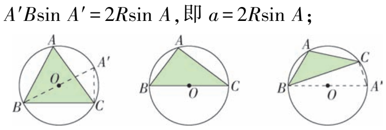
$=c\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$

$=\frac{1}{2}(2a^2-2b^2)=a^2-b^2$,

所以所证等式成立.

17. 证明 只需证 $a=2R\sin A$,其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

①若 A 为锐角(如图①所示),作直径 BA',连接 $A'C$,则 $A=A'$,在 Rt$\triangle A'CB$ 中,$BC=A'B\sin A'=2R\sin A$,即 $a=2R\sin A$;



图①　　图②　　图③

②若 A 是直角(如图②所示),在 Rt$\triangle BAC$ 中,可直接得 $a=2R\sin A$;

③若 A 为钝角(如图③所示),作直径 BA',连接 $A'C$,则 $A'=\pi-A$,在 Rt$\triangle BCA'$ 中,$BC=A'B\sin A'=2R\sin(\pi-A)=2R\sin A$,即 $a=2R\sin A$.

由①②③得 $a=2R\sin A$.

同理可证 $b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.

18. 证明 根据 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$.

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\times\frac{a\sin B}{\sin A}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$.

拓广探索

19. 解析 $AR=RT=TC$.

证明:$\because \triangle ARE\backsim\triangle CRB$,$E$ 为 AD 的中点,

$\therefore BR=2ER$,

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

同理 $\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore AR=RT=TC$.

20. 证明 (1)根据余弦定理的推论,

得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

由同角三角函数之间的关系得,

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$,

代入 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$,

得 $S=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$,

$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$,①

$\because p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$\therefore \frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$,

$\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$,

$\frac{1}{2}(b+a-c)=p-c$.

代入①可证得,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(2)三角形的面积 S 与三角形内切圆半径 r 之间有关系式 $S=\frac{1}{2}\times 2p\times r=pr$,

所以 $r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

(3)根据三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ah_a$,

得 $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

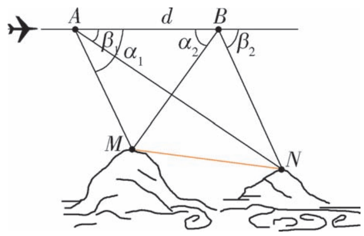
即 $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

同理,$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

21. 解析 方案一:(1)需要测量的数据有:A

点到 M,N 点的俯角 α_1,β_1;B 点到 M,N 的俯角 α_2,β_2;A,B 的距离 d(如图所示).



(2)第一步:计算 AM.由正弦定理得 $AM=\frac{d\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$;

第二步:计算 AN.由正弦定理得 $AN=\frac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$;

第三步:计算 MN.由余弦定理得

$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\times AN\cos(\alpha_1-\beta_1)}$.

方案二:(1)需要测量的数据有:

A 点到 M,N 点的俯角 α_1,β_1;B 点到 M,N 点的俯角 α_2,β_2;A,B 的距离 d(如图所示).

(2)第一步:计算 BM.由正弦定理得 $BM=\frac{d\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$;

第二步:计算 BN.由正弦定理得 $BN=\frac{d\sin\beta_1}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$;

第三步:计算 MN.由余弦定理得 $MN=\sqrt{BM^2+BN^2+2BM\times BN\cos(\beta_2+\alpha_2)}$.

22.解析 (1)由正弦定理,得

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$.

$\because B=\pi-(A+C)$,

$\therefore \sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$.

又$\because \sin C\neq 0$,

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$,$\therefore bc=4$.

而 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

故 $b^2+c^2=8$,解得 $b=c=2$(负值已舍去).

23.解析 略.

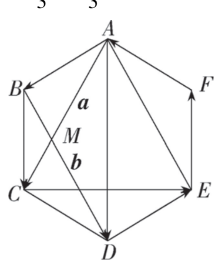
复习参考题 6

复习巩固

1.答案 (1)√ (2)√ (3)× (4)×

2.答案 (1)D (2)B (3)D (4)C (5)D (6)B

3.解析 如图,AC 与 BD 交于点 M,则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,



$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

4.解析 (1)$\overrightarrow{AB}=(8,-8)$,$|\overrightarrow{AB}|=8\sqrt{2}$.

(2)$\overrightarrow{OC}=(2,-16)$,$\overrightarrow{OD}=(-8,8)$.

(3)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=33$.

5.解析 设 $D(x,y)$,由题意知 $(-2,-1)=(x,y-1)$,所以 $x=-2,y=0$,所以 $D(-2,0)$.

6.解析 由题意得 $(-1,0)=\lambda(1,0)+\mu(1,1)$,整理得 $\begin{cases}\mu+\lambda=-1,\\0+\mu=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\mu=0,\\\lambda=-1.\end{cases}$

7.解析 由题意得 $\overrightarrow{AB}=(3,0)$,$\overrightarrow{AC}=(3,4)$,$\overrightarrow{BC}=(0,4)$,$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=0$,$\cos C=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{4}{5}$.

8.解析 由题意得 $(\lambda+1)\times1+\lambda\times0=0$,解得 $\lambda=-1$.

9.解析 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}$

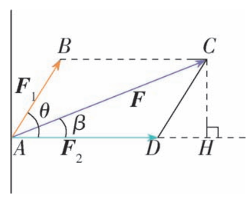
$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$

$=\sqrt{3+2\times\sqrt{3}\times2\times\cos30°+4}=\sqrt{13}$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$

$=\sqrt{3-2\times\sqrt{3}\times2\times\cos30°+4}=1$.

10.解析 如图,过点 C 作 $CH\perp AD$,交 AD 的延长线于点 H.



设 $CH=x,DH=y$,则

$\begin{cases}100^2=(70+y)^2+x^2,\\40^2=x^2+y^2,\end{cases}$ 解得 $y=25$,

$\therefore \cos\theta=\frac{DH}{DC}=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$,

$\cos\beta=\frac{AH}{AC}=\frac{70+25}{100}=\frac{19}{20}$.

11.解析 (1)$B\approx21°9'$,$C\approx38°51'$,$c\approx8.69$ cm.

(2)$B\approx41°49'$,$C\approx108°11'$,$c\approx11.40$ cm

或 $B\approx138°11'$,$C\approx11°49'$,$c\approx2.46$ cm.

(3)$A\approx11°2'$,$B\approx38°58'$,$c\approx28.02$ cm.

(4)$A\approx28°57'$,$B\approx46°34'$,$C\approx104°29'$.

12.解析 设海轮在 B 处望见小岛在北偏东 75°,在 C 处望见小岛在北偏东 55°,从小岛 A 向海轮的航线 BD 作垂线段 AD,如图所示.

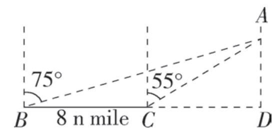
在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=90°-75°=15°$,$\angle ACB=90°+55°=145°$,$\angle BAC=180°-15°-145°=20°$.

在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得

$AC=\frac{BC\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\frac{8\times\sin15°}{\sin20°}$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$AD=AC\sin\angle ACD=\frac{8\times\sin15°}{\sin20°}\times\sin35°\approx3.47>3$,

所以这艘海轮不改变航向继续前进没有触礁的危险.



综合运用

13.答案 (1)A (2)D (3)B (4)C (5)D (6)C

14.证明 (1)先证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

于是 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

再证 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$,

所以由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

于是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

几何意义是矩形的两条对角线相等.

(2)先证 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$,

因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$.

所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.再证 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ 得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$,

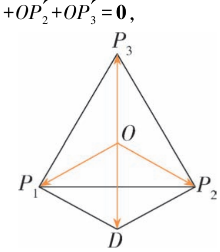
即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$,

所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

几何意义是菱形的对角线互相垂直.

15.证明 如图,设 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$,

因为 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\boldsymbol{0}$,



所以 $\overrightarrow{OP_3}=-\overrightarrow{OD}$,

又 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|$,

所以 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{P_1D}|$.

易得 $\angle OP_1P_2=30°$,

同理可得 $\angle OP_1P_3=30°$.

所以 $\angle P_3P_1P_2=60°$.

同理可得 $\angle P_1P_2P_3=60°$,$\angle P_2P_3P_1=60°$.

所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 为等边三角形.

16.解析 连接 AB,由对称性可知,AB 是 $\triangle SMN$ 的中位线,

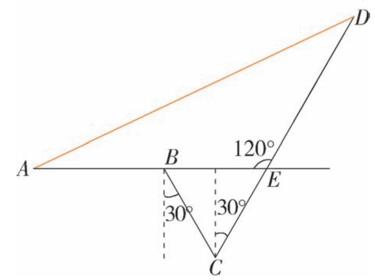
所以 $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

17.解析 如图,$AE=9+6=15$ km,$\angle AED=120°$,$DE=10$ km.

由余弦定理得 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot ED\cdot\cos120°=15^2+10^2-2\times15\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=475$,$\therefore AD=5\sqrt{19}$ km.

由正弦定理得 $\sin A=\frac{DE\sin120°}{AD}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{19\times3}}{19}\approx0.3974$,$\therefore A\approx23°.90°-23°=67°$.

故由 A 地到 D 地位移的大小为 $5\sqrt{19}$ km，方向约为北偏东 67°.



拓广探索

18. 解析　略.

19. 解析　略.

第七章　复数

7.1　复数的概念

7.1.1　数系的扩充和复数的概念

练习

1. 解析　$-2+\frac{1}{3}\mathrm{i}$ 的实部是 -2，虚部是 $\frac{1}{3}$；

$\sqrt{2}+\mathrm{i}$ 的实部是 $\sqrt{2}$，虚部是 1；

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的实部是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，虚部是 0；

$-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的实部是 0，虚部是 $-\sqrt{3}$；

i 的实部是 0，虚部是 1；

0 的实部和虚部都是 0.

2. 解析　$2+\sqrt{7}$，0.618，0 是实数；$\frac{2}{7}\mathrm{i}$，i，$5\mathrm{i}+8$，$3-9\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\mathrm{i}(1-\sqrt{3})$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是虚数；$\frac{2}{7}\mathrm{i}$，i，$\mathrm{i}(1-\sqrt{3})$ 是纯虚数. 理由略.

3. 解析　(1) 由 $\begin{cases}x+y=2x+3y,\\ y-1=2y+1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\ y=-2.\end{cases}$

(2) 由 $\begin{cases}x+y-3=0,\\ x-2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

7.1.2　复数的几何意义

练习

1. 解析　在复平面内，点 A,B,C,D,E,F,G,H 对应的复数分别为 $4+3\mathrm{i}$，$3-3\mathrm{i}$，$-3+2\mathrm{i}$，$-3-3\mathrm{i}$，5，-2，$5\mathrm{i}$，$-5\mathrm{i}$.

2. 解析　略.

3. 解析　(1) 略.

(2) $|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，$|-2+4\mathrm{i}|=2\sqrt{5}$，$|-2\mathrm{i}|=2$，$|4|=4$，$\left|\frac{3}{2}-4\mathrm{i}\right|=\frac{\sqrt{73}}{2}$.

◆习题 7.1

复习巩固

1. 解析　(1) 存在，如 $-\sqrt{2}+a\mathrm{i}$ ($a\neq0$ 且 $a\in\mathbf{R}$).
(2) 存在，如 $a-\sqrt{2}\mathrm{i}$ ($a\in\mathbf{R}$). (3) 存在，只能是 $-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. 解析　(1) $m=0$ 或 $m=3$. (2) $m\neq0$ 且 $m\neq3$.
(3) $m=2$.

3. 解析　(1) $x=1,y=7$. (2) $x=4,y=-1$.

4. 解析　(1) 点 P 在第一象限.
(2) 点 P 在第二象限.
(3) 点 P 在 y 轴的非正半轴上.
(4) 点 P 在 x 轴的下方(不包括 x 轴).

5. 解析　$|z_1|=|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$|z_2|=\left|\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-\sqrt{2})^2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore |z_1|>|z_2|$.

综合运用

6. 解析　(1) 若位于第四象限，则有 $\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\ m^2-5m-14<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>5 \text{ 或 } m<3,\\ -2<m<7\end{cases}\Rightarrow$ $5<m<7$ 或 $-2<m<3$.

(2) 若位于第一象限或第三象限，则有 $(m^2-8m+15)\cdot(m^2-5m-14)>0$，
即 $(m-3)(m-5)(m+2)(m-7)>0$，
解得 $m>7$ 或 $3<m<5$ 或 $m<-2$.

(3) 若位于直线 $y=x$ 上，则实部与虚部相等，必有 $m^2-8m+15=m^2-5m-14$，解得 $m=\frac{29}{3}$.

7. 解析　(1) 因为 $\overrightarrow{OA}$ 的起点在原点，所以终点坐标为向量对应的坐标，故 $A(2,1)$，而点 A 关于实轴的对称点是 $B(2,-1)$，所以向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

(2) $B(2,-1)$ 关于虚轴的对称点是 $C(-2,-1)$，故点 C 对应的复数为 $-2-\mathrm{i}$.

8. 解析　(1) 满足条件 $|z|=3$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 3 为半径的圆.

(2) 满足条件 $2\leq|z|<5$ 的点 Z 的集合是以原点为圆心，分别以 2 和 5 为半径的两个圆所夹的圆环，包括内圆的边界但不包括外圆的边界.

9. 解析　复数 z 对应的点应位于直线 $y=3(x>0)$ 上.

拓广探索

10. 解析　设 $z=a+\sqrt{3}\mathrm{i}$ ($a\in\mathbf{R}$).
$\because |z|=2$，$\therefore a^2+3=4$，$\therefore a=\pm1$，
$\therefore z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

11. 解析　在复平面内指出复数对应的点 Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 略.
这 4 个点在同一个圆上. 证明：因为 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=\sqrt{5}$，所以这 4 个点在同一个圆上.

7.2　复数的四则运算

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

练习

1. 解析　(1) $(2+4\mathrm{i})+(3-4\mathrm{i})=5$.
(2) $5-(3+2\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$.
(3) $(-3-4\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})-(1-5\mathrm{i})=(-3+2-1)+(-4+1+5)\mathrm{i}=-2+2\mathrm{i}$.
(4) $(2-\mathrm{i})-(2+3\mathrm{i})+4\mathrm{i}=(2-2+0)+(-1-3+4)\mathrm{i}=0$.

2. 解析　略.

3. 证明　设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ ($a_1,b_1\in\mathbf{R}$)，
$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ ($a_2,b_2\in\mathbf{R}$)，
$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$ ($a_3,b_3\in\mathbf{R}$).

(1) 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$.
$z_1+z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$，
$z_2+z_1=(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\mathrm{i}$，
$\therefore z_1+z_2=z_2+z_1$.

(2) 结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.
$(z_1+z_2)+z_3=[(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})]+(a_3+b_3\mathrm{i})=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}]+(a_3+b_3\mathrm{i})=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\mathrm{i}$，
$z_1+(z_2+z_3)=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\mathrm{i}$，
$\therefore (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

4. 解析　(1) $|z_1-z_2|=|(2+\mathrm{i})-(3-\mathrm{i})|=|-1+2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$.
(2) $|z_3-z_4|=|(8+5\mathrm{i})-(4+2\mathrm{i})|=|4+3\mathrm{i}|=5$.

7.2.2　复数的乘、除运算

练习

1. 解析　(1) $-18-21\mathrm{i}$. (2) $6-17\mathrm{i}$. (3) $-20-15\mathrm{i}$.

2. 解析　(1) -5. (2) $-2\mathrm{i}$. (3) 5.

3. 解析　(1) i. (2) $-\mathrm{i}$. (3) $1-\mathrm{i}$. (4) $-1-3\mathrm{i}$.

4. 解析　(1) $x^2=-\frac{16}{9}$，$\therefore x=\pm\frac{4}{3}\mathrm{i}$.
(2) $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$，
$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

◆习题 7.2

复习巩固

1. 解析　(1) $9-3\mathrm{i}$. (2) $-2+3\mathrm{i}$.
(3) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}\mathrm{i}$. (4) $0.3+0.2\mathrm{i}$.

2. 解析　由题意得 $\overrightarrow{OA}=(6,5)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,4)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-9,-1)$，故 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $-9-\mathrm{i}$，又因为 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(9,1)$，所以 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $9+\mathrm{i}$.

3. 解析　(1) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})=-21+24\mathrm{i}$.
(2) $(4-3\mathrm{i})(-5-4\mathrm{i})=-20-12-16\mathrm{i}+15\mathrm{i}=-32-\mathrm{i}$.
(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$.
(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
(5) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+(-1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

4. 解析　(1) $\frac{2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{4\mathrm{i}-2}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.
(2) $\frac{2+\mathrm{i}}{7+4\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(7-4\mathrm{i})}{(7+4\mathrm{i})(7-4\mathrm{i})}=\frac{18-\mathrm{i}}{65}=\frac{18}{65}-\frac{1}{65}\mathrm{i}$.
(3) $\frac{1}{(2-\mathrm{i})^2}=\frac{1}{3-4\mathrm{i}}=\frac{3+4\mathrm{i}}{25}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}$.
(4) $\frac{5(4+\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}=\frac{5(15+8\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}=1-38\mathrm{i}$.

综合运用

5. 解析　由复数的几何意义，知 A,B,C 分别对应复平面内的点 $(1,3)$，$(0,-1)$，$(2,1)$，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，设 $D(x,y)$，则有 $(-1,-4)=(2-x,1-y)$，所以 $\begin{cases}2-x=-1,\\ 1-y=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=5,\end{cases}$ 故点 D 对应的复数为 $3+5\mathrm{i}$.

6. 解析 (1) $\Delta=4^2-4\times1\times5=-4<0$,

∴ $x=\frac{-4\pm2i}{2}=-2\pm i$.

(2) $\Delta=(-3)^2-4\times2\times4=-23<0$,

∴ $x=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{4}$.

7. 解析 因为 $2i-3$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0$ 的一个根，所以有 $2(-3+2i)^2+p(-3+2i)+q=0$，整理得 $(10-3p+q)+(2p-24)i=0$.

故有 $\begin{cases}2p-24=0,\\10-3p+q=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=12,\\q=26.\end{cases}$

拓广探索

8. 解析 (1) $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$.

(2) $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a+bi)(a-bi)(a+b)(a-b)$.

9. 解析 ∵ $|z-(2+i)|=|(x+yi)-(2+i)|=|(x-2)+(y-1)i|=3$，∴ $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3$. 表示点 (x,y) 与点 $(2,1)$ 的距离为定长 3，故复平面内满足 $|z-(2+i)|=3$ 的点 Z 的集合是以 $(2,1)$ 为圆心，3 为半径的圆.

10. 解析 略.

7.3* 复数的三角表示

7.3.1 复数的三角表示式

练习

1. 解析 (1) $4=4(\cos 0+i\sin 0)$，图略.

(2) $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$，图略.

(3) $2\sqrt3+2i=4\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$，图略.

(4) $-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$，图略.

2. 解析 (1) 不是，

原式 $=\frac12\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

(2) 不是，原式 $=\frac12\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

(3) 不是，原式 $=\frac12\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

(4) 是.

(5) 不是，$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=1+i$

$=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

3. 解析 (1) $6\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=6(0-i)$

$=-6i$.

(2) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)$

$=1-\sqrt3 i$.

7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

练习

1. 解析 (1) 原式 $=16\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=16\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=16\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}i\right)=4(\sqrt6-\sqrt2)+4(\sqrt6+\sqrt2)i$.

(2) 原式 $=8\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=8\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=8\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)=4\sqrt3+4i$.

(3) 原式 $=\frac{\sqrt6}{2}[\cos(240°+60°)+i\sin(240°+60°)]=\frac{\sqrt6}{2}(\cos300°+i\sin300°)=\frac{\sqrt6}{2}\left(\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=\frac{\sqrt6}{4}-\frac{3\sqrt2}{4}i$.

(4) 原式 $=30[\cos(18°+54°+108°)+i\sin(18°+54°+108°)]=30(\cos180°+i\sin180°)=-30$.

2. 解析 (1) 原式 $=2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

$=2\left(-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}i\right)=-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}i$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt6}{2}[\cos(150°-225°)+i\sin(150°-225°)]=\frac{\sqrt6}{2}(\cos75°-i\sin75°)$

$=\frac{\sqrt6}{2}\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}i\right)$

$=\frac{3-\sqrt3}{4}-\frac{3+\sqrt3}{4}i$.

(3) 原式 $=2(\cos0+i\sin0)\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt2-\sqrt2 i$.

(4) 原式 $=(\cos270°+i\sin270°)\div[2(\cos120°+i\sin120°)]=\frac12[\cos(270°-120°)+i\sin(270°-120°)]=\frac12(\cos150°+i\sin150°)=-\frac{\sqrt3}{4}+\frac14 i$.

3. 解析 $3-\sqrt3 i=2\sqrt3\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i\right)$

$=2\sqrt3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

$2\sqrt3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\sqrt3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=-2\sqrt3 i$.

◆习题 7.3

复习巩固

1. 解析 图略.

(1) $6=6(\cos 0+i\sin 0)$.

(2) $1+i=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)$

$=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

(3) $1-\sqrt3 i=2\left(\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

(4) $-\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$.

2. 解析 (1) $3\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=3\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)=3+3i$.

(2) 原式 $=8\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i\right)=4\sqrt3-4i$.

(3) 原式 $=9(-1+0)=-9$.

(4) 原式 $=6\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=-3-3\sqrt3 i$.

3. 解析 (1) 原式 $=9\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=9\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=9i$.

(2) 原式 $=2\sqrt5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=2\sqrt5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$=-\sqrt{10}+\sqrt{10}i$.

(3) 原式 $=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\left(\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)$

$=1+\sqrt3 i$.

(4) 原式 $=2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=2\left(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)$

$=-1-\sqrt3 i$.

4. 解析 (1) 原式 $=4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

$=-4$.

(2) 原式 $=2(\cos75°+i\sin75°)\times\frac{\sqrt2}{2}\times[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]$

$=\sqrt2(\cos30°+i\sin30°)$

$=\sqrt2\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)$

$=\frac{\sqrt6}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$.

(3) 原式 $=2\sqrt2[\cos(300°-135°)+i\sin(300°-135°)]$

$=2\sqrt2(\cos165°+i\sin165°)$

$=2\sqrt2\left(-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}i\right)$

$=-(\sqrt3+1)+(\sqrt3-1)i$.

(4) 原式 $=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}.$

几何解释略.

综合运用

5. 解析　(1)证明：$\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}=$

$\frac{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$

$=$右边.

(2) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$\frac{1}{z}=\frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,

故$\frac{1}{z}$的模为$\frac{1}{4}$，辐角为$-\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

$z=\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$，$\frac{1}{z}=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$，故$\frac{1}{z}$的模为1，辐角为$\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})=\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，$\frac{1}{z}=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，故$\frac{1}{z}$的模为1，辐角为$\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

6. 证明　(1)左边$=\cos(75°+15°)+\mathrm{i}\sin(75°+15°)$

$=\cos 90°+\mathrm{i}\sin 90°=\mathrm{i}=$右边.

(2)左边$=[\cos(-3\theta)+\mathrm{i}\sin(-3\theta)]\times[\cos(-2\theta)+\mathrm{i}\sin(-2\theta)]=\cos(-5\theta)+\mathrm{i}\sin(-5\theta)=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta=$右边.

7. 解析　(1)原式$=\cos(7\theta+2\theta-5\theta-3\theta)+\mathrm{i}\sin(7\theta+2\theta-5\theta-3\theta)=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

(2)原式$=\frac{\cos(-\varphi)+\mathrm{i}\sin(-\varphi)}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}$

$=\cos(-2\varphi)+\mathrm{i}\sin(-2\varphi)$

$=\cos 2\varphi-\mathrm{i}\sin 2\varphi$.

8. 解析　$z=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$=2[\cos(-30°)+\mathrm{i}\sin(-30°)]$.

逆时针方向旋转45°所得的复数为

$z_1=2[\cos(-30°+45°)+\mathrm{i}\sin(-30°+45°)]$

$=2(\cos 15°+\mathrm{i}\sin 15°)$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

顺时针旋转60°所得的复数为

$z_2=2[\cos(-30°-60°)+\mathrm{i}\sin(-30°-60°)]$

$=2(\cos 90°-\mathrm{i}\sin 90°)$

$=-2\mathrm{i}$.

拓广探索

9. 解析　向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数为

$z_1=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°)$,

向量$\overrightarrow{AC}$对应的复数为

$z_2=\sqrt{2}[\cos(45°-60°)+\mathrm{i}\sin(45°-60°)]$

$=\sqrt{2}(\cos 15°-\mathrm{i}\sin 15°)$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$.

$\therefore \overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$,

$\therefore C\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. 证明　如图所示，向量$\overrightarrow{OA}$对应的复数

$z_1=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\angle 1+\mathrm{i}\sin\angle 1)$,

向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数

$z_2=2+\mathrm{i}=\sqrt{5}(\cos\angle 2+\mathrm{i}\sin\angle 2)$,

向量$\overrightarrow{OC}$对应的复数

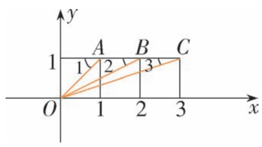
$z_3=3+\mathrm{i}=\sqrt{10}(\cos\angle 3+\mathrm{i}\sin\angle 3)$,

$z_1z_2z_3=10[\cos(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+\mathrm{i}\sin(\angle 1+\angle 2+\angle 3)]=(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$,

$\therefore 10\cos(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+10\mathrm{i}\sin(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=10\mathrm{i}$,

$\therefore \begin{cases}\cos(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=0,\\ \sin(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=1,\end{cases}$

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}$.



复习参考题 7

复习巩固

1. 答案　(1)A　(2)B　(3)D　(4)D

2. 答案　(1)$3-4\mathrm{i}$或$-3-4\mathrm{i}$.

(2)$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

(3)$9+\mathrm{i}$.

(4)$-4+4\mathrm{i}$.

3. 证明　设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,

则$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,

$\therefore z\cdot\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$,

$|z|^2=a^2+b^2$, $|\bar{z}|^2=a^2+b^2$,

$\therefore z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

4. 解析　设$z=b\mathrm{i}(b\neq 0$，且$b\in\mathbf{R})$，则$(z+2)^2-8\mathrm{i}=(b\mathrm{i}+2)^2-8\mathrm{i}=-b^2+4+4b\mathrm{i}-8\mathrm{i}=(4-b^2)+(4b-8)\mathrm{i}$，由题意知，

$\begin{cases}4-b^2=0,\\ 4b-8\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\pm 2,\\ b\neq 2\end{cases}\Rightarrow b=-2.$

所以$z=b\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$.

5. 解析　(1)$4x^2+9=0$,

$\therefore x^2=-\frac{9}{4}$，$\therefore x=\pm\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

(2)$(x-3)(x-5)+2=0$可化为$x^2-8x+17=0$,

$\Delta=(-8)^2-4\times 17=-4<0$,

$\therefore x=\frac{8\pm 2\mathrm{i}}{2}=4\pm\mathrm{i}$.

综合运用

6. 解析　解法一：$\because \frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$,

$\therefore z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{(5+10\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(5+10\mathrm{i})+(3-4\mathrm{i})}$

$=\frac{5(1+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{2(4+3\mathrm{i})}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

解法二：$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{5(1+2\mathrm{i})}+\frac{1}{3-4\mathrm{i}}$

$=\frac{1-2\mathrm{i}}{25}+\frac{3+4\mathrm{i}}{25}=\frac{4+2\mathrm{i}}{25}$,

$\therefore z=\frac{25}{2(2+\mathrm{i})}=\frac{25(2-\mathrm{i})}{10}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

7. 解析　解法一：$\because (1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$,

$\therefore \bar{z}=\frac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，$\therefore z=2+\mathrm{i}$,

$\therefore \frac{z}{\bar{z}}=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

解法二：设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,

$\because (1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$,

$\therefore (1+2\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$，即$(a+2b)+(2a-b)\mathrm{i}=4+3\mathrm{i}$,

则有$\begin{cases}a+2b=4,\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

$\therefore z=2+\mathrm{i}$，$\therefore \frac{z}{\bar{z}}=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})^2}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{3+4\mathrm{i}}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

8. 解析　(1)$\mathrm{i}^1=\mathrm{i}, \mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=1, \mathrm{i}^5=\mathrm{i}, \mathrm{i}^6=-1, \mathrm{i}^7=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^8=1$.

(2)$\mathrm{i}^{4n-3}=\mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n-2}=-1, \mathrm{i}^{4n-1}=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n}=1, n\in\mathbf{N}^*$.

拓广探索

9. 解析　由$z_1=z_2$得$m+(4-m^2)\mathrm{i}=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)\mathrm{i}$，由复数相等的定义知，

$\begin{cases}m=2\cos\theta,\\ 4-m^2=\lambda+3\sin\theta,\end{cases}$得$4-4\cos^2\theta=\lambda+3\sin\theta$,

则$\lambda=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta=4-4(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4\left(\sin^2\theta-\frac{3}{4}\sin\theta\right)$

$=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$.

$\because \theta\in\mathbf{R}$，$\therefore \sin\theta\in[-1,1]$,

$\therefore \lambda_{\max}=4\left(-1-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}=7$，$\lambda_{\min}=-\frac{9}{16}$.

故λ的取值范围是$\left[-\frac{9}{16},7\right]$.

10. 解析　向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数为

$(2+\mathrm{i})(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$

$=(2+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}$,

即点B对应的复数为$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}$.

向量$\overrightarrow{OC}$对应的复数为

$(2+\mathrm{i})(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)$

$=(2+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}$,

即点C对应的复数为$\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}$.

第八章　立体几何初步

8.1　基本立体图形

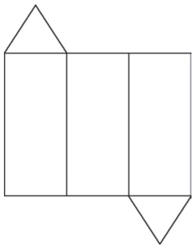
练习

1. 解析　略.

2. 答案　(1)×　(2)√

3. 答案　(1)直五棱柱　(2)4；三棱锥(四面体)

4.解析

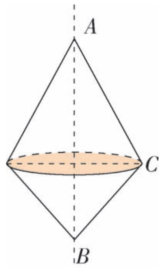


练习

1.解析　(1)圆台.　(2)圆柱.　(3)球.
(4)圆锥.

2.解析　(1)圆柱和圆锥组合而成.
(2)正六棱柱内挖一个圆柱.

3.解析



如图,是由两个圆锥组合而成的简单组合体.

4.解析　略.

◆习题 8.1

复习巩固

1.解析　经过顶点 D 的棱:
AD、D_1D、CD.
经过顶点 D 的面:
平面 ADD_1A_1、平面 $ADCB$、平面 D_1DCC_1.

2.答案　(1)(3)(5)

3.C

4.解析　(1)不是台体,因为该几何体的"侧棱"的延长线不交于一点;
(2)(3)也不是台体,因为不是由平行于棱锥和圆锥底面的平面截得的几何体.

5.解析　(1)由圆锥和圆台组合而成的简单组合体.
(2)由四棱柱和四棱锥组合而成的简单组合体.

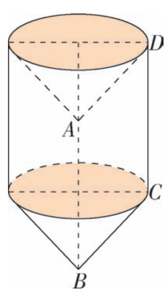
综合运用

6.答案　(1)√　(2)√　(3)√　(4)√

7.D

8.解析　剩下的几何体为五棱柱 $ABFEA'-DCGHD'$,截去的几何体为三棱柱 $EFB'-HGC'$.

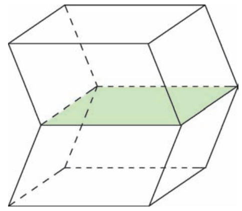
9.解析



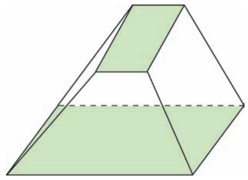
这个几何体是从圆柱的上面挖去一个圆锥放到圆柱的下面.

拓广探索

10.解析　(1)不正确.



虽然这个几何体满足题中条件,但这个几何体不是棱柱.
(2)不正确.



如图几何体,满足题中条件,但不是棱台.

8.2　立体图形的直观图

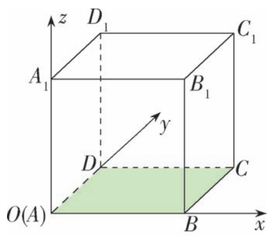
练习

1.答案　(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

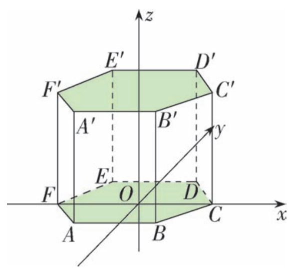
2.解析　略.

练习

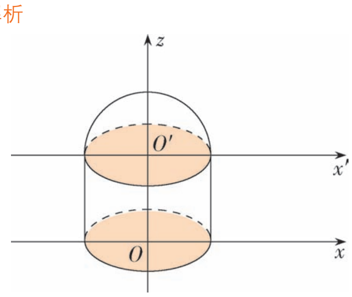
1.解析



2.解析



3.解析

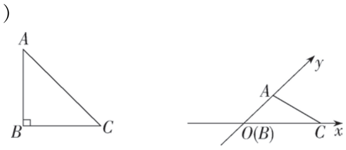


◆习题 8.2

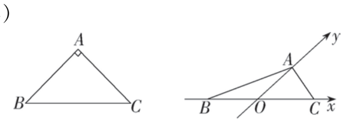
复习巩固

1.答案　(1)√　(2)√　(3)×　(4)×

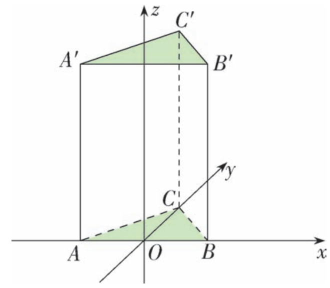
2.解析
(1)



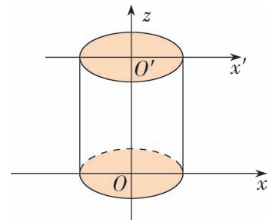
(2)



3.解析

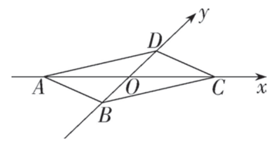


4.解析

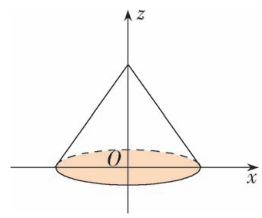


综合运用

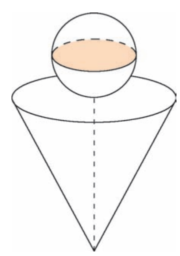
5.解析



6.解析



7.解析　上面是一个球,下面是一个圆锥组成的几何体.



拓广探索

8.解析　略.

8.3　简单几何体的表面积与体积

8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

练习

1.解析　$S_{上表面}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times6=6\sqrt{3}(cm^2)$,

$S_{下表面}=\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}\times6=54\sqrt{3}(cm^2)$,

$S_{侧面}=6\times\left[\frac{1}{2}\times(2+6)\times\sqrt{21}\right]=24\sqrt{21}$
(cm^2).

$\therefore S_{表}=S_{上表面}+S_{下表面}+S_{侧面}=(60\sqrt{3}+24\sqrt{21})cm^2$.

2.解析　(1)64.
(2)三面红色的小立方体位于大立方体 8 个