数学（八）

（全卷共四个大题，满分 150 分，时间 120 分钟）

注意事项：1、试题的答案书写在答题卡上，不得在试题卷上直接作答.

2．考试结束，试题卷由学生自己保管，监考人员只收答题卡.

参考公式 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）**的顶点坐标为** $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$**，对称轴为直线** $x=-\frac{b}{2a}$ **.**

一、选择题（本大题 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）每个小题的下面，都给出了代号为 A、B、C、D 的四个答案，其中只有一个是正确的，请在答题卡题号右侧正确答案所对应的方框涂黑.

1. 刘徽在《九章算术注》对负数做了很自然的解释：“两算得失相反，要令正、负以名之”．若收入 100 元记作 $+100$ 元，那么支出 30 元应记作（　　）

A. $+30$ 元　　B. -30 元　　C. $+70$ 元　　D. -70 元

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查正数与负数，理解正数与负数的意义是解题的关键．根据正数与负数的意义可求解．

【详解】解：收入 100 元记作 $+100$ 元，那么支出 30 元应记作 -30 元，

故选：B．

2. 下列图形中，是轴对称图形的是（　　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了轴对称图形的定义；平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形，就叫做轴对称图形；即可作答．

【详解】解：A、不是轴对称图形，故该选项是错误的；

B、不是轴对称图形，故该选项是错误的；

C、不是轴对称图形，故该选项是错误的；不是轴对称图形，故该选项是错误的；

D、是轴对称图形，故该选项是正确的；

故选：D

3. 若 $2x^{m}y^{3}$ 与 $-3xy^{n}$ 是同类项，则 $m+n$ 的值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类项的定义，以及已知字母的值，求代数式的值，根据同类项的定义得出 m，n 的值是解题的关键．

【详解】解：∵若 $2x^{m}y^{3}$ 与 $-3xy^{n}$ 是同类项，

$\therefore m=1$，$n=3$，

$\therefore m+n=1+3=4$．

故选：C．

4. 为了了解某区初中毕业年级体育考试情况，从 20000 名初三年级学生中随机抽取 1200 名学生的体育考试成绩进行分析，下列说法正确的是（　　）

A. 该调查方式是普查

B. 每名初三学生的体育考试成绩是个体

C. 1200 名学生是总体的一个样本

D. 20000 名考生是总体

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了抽样调查与全面调查，总体、个体与样本．为了一定目的而对考察对象全体进行的调查，称为全面调查，也叫普查．抽样调查是指从总体中抽取样本进行调查，根据样本来估计总体的一种调查．总体是指考查的对象的全体，个体是总体中的每一个考查的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体．正确区分抽样调查与全面调查，总体、个体与样本是解题的关键．

【详解】解：A． 该调查方式是普查；从 20000 名初三年级学生中随机抽取 1200 名学生的体育考试成绩进行分析，此调查方式为抽样调查，故本选项不合题意；

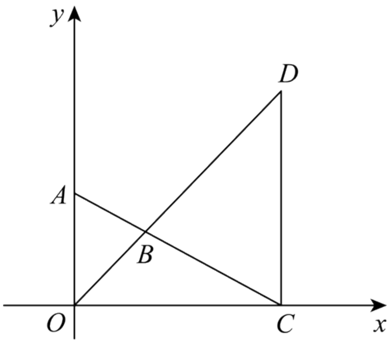
B． 每名初三学生的体育考试成绩是个体；根据个体的定义，故本选项符合题意；

C． 1200 名学生是总体的一个样本；样本是 1200 名学生的体育考试成绩，故本选项不合题意；

D． 20000 名考生是总体；20000 名考生的体育考试成绩是样本，故本选项不合题意；

故选：B．

5. 如图，$\triangle AOB$ 与 $\triangle CDB$ 位似，点 B 为位似中心，$\triangle AOB$ 与 $\triangle CDB$ 的周长之比为 $1:2$，若点 B 坐标为 $(1,1)$，则点 D 的坐标是（　　）



A. $(3,3)$　　　　B. $(4,4)$　　　　C. $(5,5)$　　　　D. $(6,6)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是位似变换的概念和性质，相似三角形的性质，掌握相似三角形的周长比等于相似比是解题的关键．

根据周长比确定相似比，由点 B 得坐标确定 OB 的，即可求解 BD、OD 长度，便可求解点 D 的坐标．

【详解】解：∵ $\triangle AOB$ 与 $\triangle CDB$ 位似，点 B 为位似中心，$\triangle AOB$ 与 $\triangle CDB$ 的周长之比为 $1:2$，

∴ $\triangle AOB \backsim \triangle CDB$，相似比为 $1:2$，

即 $\dfrac{OB}{DB}=\dfrac{1}{2}$，

又∵ B 坐标为 $(1,1)$，

∴ $OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

∴ $BD=2OB=2\sqrt{2}$，

∴ $OD=OB+BD=3\sqrt{2}$，

$\therefore OC=CD=3$

∴ D 的坐标为 $(3,3)$．

故答案为：A．

6. 估计 $\sqrt{6}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$ 的结果应在（　　）

A. 1 和 2 之间　　　　B. 2 和 3 之间　　　　C. 3 和 4 之间　　　　D. 4 和 5 之间

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，先将原式进行计算，再对原式的值进行判断即可得解.

【详解】$\sqrt{6}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=6\sqrt{2}-6$，

∵$1.41<\sqrt{2}<1.42$，

∴$8.46<6\sqrt{2}<8.52$，

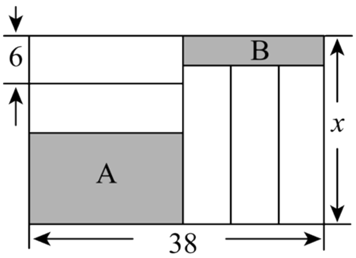
∴$2<6\sqrt{2}-6<3$，

∴ $\sqrt{6}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$ 的结果应在 2 和 3 之间，

故选：B．

【点睛】本题主要考查了实数的计算以及实数范围的确定，熟练掌握实数的混合运算是解决本题的关键.

7. 如图，长为38cm，宽为$x\text{cm}$的大长方形被分割成 7 小块．除阴影 A、B 外，其余 5 块是形状、大小完全相同的小长方形，其较短的边长为6cm，则阴影 A 的周长比阴影 B 的周长多（　　）



A. 20cm　　　　B. 18cm　　　　C. 16cm　　　　D. 14cm

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了列代数式、整式加减法的应用，用含 x 的代数式表示出阴影 A 与阴影 B 的周长是解答本题的关键.

根据整式的加减法法则计算即可得.

【详解】解：阴影 A 的周长为$2(38-6\times3)+2(x-12)=16+2x$（cm），

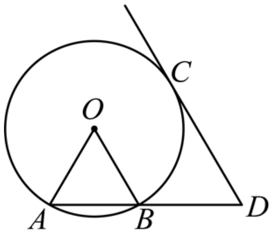
阴影 B 的周长为$2\times6\times3+2\left[x-(38-3\times6)\right]=2x-4$（cm），

∴$16+2x-(2x-4)=20\text{cm}$

∴阴影 A 的周长比阴影 B 的周长多20cm，

故选：A．

8. 如图，点 D 是 $\odot O$ 的弦 AB 延长线上一点，CD 切 $\odot O$ 于点 C，若 $OB/\!/CD$，$AB=OB=\sqrt{3}$，则 BD 的长度为（　　）



A. $\sqrt{5}$　　　　B. $\sqrt{3}+1$　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. 2

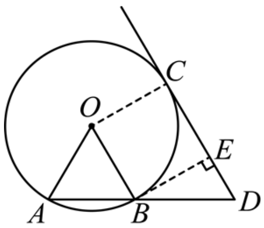
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了圆的切线的性质，等边三角形的性质，平行线的性质，含有 $30°$ 角直角三角形的性质，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键．

连接 OC，过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E，先证明 $\triangle OAB$ 是等边三角形，由 $OB/\!/CD$ 得 $\angle D=\angle OBA=60°$，继而解 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 即可．

【详解】解：连接 OC，过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E，



$\because AB=OB=\sqrt{3}$，$OA=OB$，

$\therefore OA=OB=AB=\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OBA=60°$，

$\because OB/\!/CD$，

$\therefore \angle D=\angle OBA=60°$，

$\because CD$ 切 $\odot O$ 于点 C,

$\therefore \angle OCD=90°$，

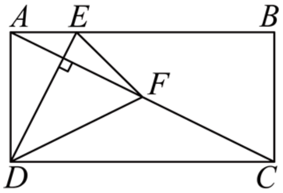
$\because BE\perp CD$，$OB/\!/CD$，

$\therefore BE=OC=\sqrt{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$BD=\dfrac{BE}{\sin\angle D}=2$，

故选：D.

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 为边 AB 上一点，连接 DE，点 F 为对角线 AC 的中点，连接 EF，若 $DE\perp AC$，$AB=2AD$，设 $\angle AFE=\alpha$，则 $\angle DAF$ 的度数可以表示为（　　）



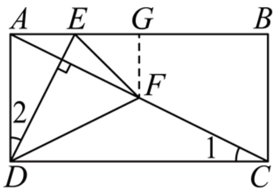
A. $45^\circ+\dfrac{1}{2}\alpha$　　B. $45^\circ+\alpha$　　C. $45^\circ-\alpha$　　D. $45^\circ-\dfrac{1}{2}\alpha$

【答案】B

【解析】

【分析】取 AB 的中点 G，连接 FG，则 FG 为 $\triangle ACB$ 中位线，$FG=\dfrac{1}{2}CB, FG/\!/BC$，先证明 $\angle 1=\angle 2$，则 $\tan\angle 1=\tan\angle 2$，设 $AD=2x$，则 $AB=4x$，则 $FG=x$，再证明 $\angle FEB=45^\circ$，后面通过外角定理及垂直的意义即可求解．

【详解】解：取 AB 的中点 G，连接 FG，则 FG 为 $\triangle ACB$ 中位线，$FG=\dfrac{1}{2}CB, FG/\!/BC$，



$\because AB=2AD$，

$\therefore$设 $AD=2x$，则 $AB=4x$

$\because$矩形 $ABCD$，

$\therefore \angle B=\angle ADC=\angle DAB=90^\circ, AB=DC=4x, BC=AD=2x$，

$\because DE\perp AC$，

$\therefore \angle 1+\angle CDE=\angle 2+\angle CDE=90^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \tan\angle 1=\tan\angle 2$，

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AD}{DC}$，

$\therefore \dfrac{AE}{2x}=\dfrac{2x}{4x}$，

$\therefore AE=x$，

$\therefore EG=AG-AE=2x-x=x$，

而 $FG=\dfrac{1}{2}CB$，

$\therefore FG=x$，

$\therefore FG=FE$，又 $FG//CB,\angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle FGE=90^\circ$，

$\therefore \triangle FGE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle FEB=45^\circ$，

$\because \angle FEB=\alpha+\angle EAF$，

$\therefore \angle EAF=45^\circ-\alpha$，

$\therefore \angle DAF=90^\circ-\angle EAF=90^\circ-\left(45^\circ-\alpha\right)=45^\circ+\alpha$.

故选：B.

【点睛】本题考查了矩形的性质，三角形的中位线定理，外角定理，以及同角的余角相等，锐角三角函数，熟练掌握知识点是解决本题的关键.

10. 已知有序整式串：$m-n$，m，对其进行如下操作：

第 1 次操作：用第一个整式减去第二个整式得到一个整式，将得到的整式作为新整式串的第一项，即得到新的整式串：$-n$，$m-n$，m；

第 2 次操作：用第一个整式减去第二个整式得到一个整式，将得到的整式作为新整式串的第一项，即得到新的整式串：$-m$，$-n$，$m-n$，m；

依次进行操作．下列说法：

①第 3 次操作后得到的整式串为：$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；

②第 11 次操作得到的新整式与第 22 次得到的新整式相等；

③第 2024 次操作后得到的整式串各项之和为 $m-2n$.

其中正确的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】

此题考查了数字变化类，整式的加减，本题中理解每一次操作的方法是前提，求出每一次操作后得到的整式串以及整式串各项之和的规律是解题的关键．首先具体地求出每一次操作后得到整式串以及整式串各项之和，从中发现规律，进而判断即可．

【详解】解：由题意可得，第 1 次操作后得到整式串$-n$，$m-n$，m；各项之和为$2m-2n$；

第 2 次操作后得到整式串$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和为$m-2n$；

第 3 次操作后得到整式串$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和为$-n$；故说法①正确；

第 4 次操作后得到整式串n，$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和 为0；

第 5 次操作后得到整式串m m，n，$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和为m；

第 6 次操作后得到整式串$m-n$，m，n，$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和为$2m-n$；

第 7 次操作后得到整式串$-n$，$m-n$，m，n，$-m+n$，$-m$，$-n$，$m-n$，m；各项之和为

$2m-2n$；

. . .

所以，各项之和以及各项的首项都以 6 次操作为一个周期依次循环．

$\because 2024\div6=337...2$，

$\therefore$第 2024 次操作后的整式串各项之和与第 2 次操作后的整式串各项之和相同，为$m-2n$，故说法③正确；

Q$11\div6=1...5$,

$\therefore$第 11 次操作后得到的新整式与第 5 次操作后得到的新整式相等都是m，

Q$22\div6=3\ldots4$,

$\therefore$第 22 次操作后得到的新整式与第 4 次操作后得到的新整式相等，都是n，故第 11 次操作后得到的新整式与第 22 次操作后得到的新整式不相等，故说法②错误．

故选：C．

二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分）请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上．

11．2024 年 3 月 12 日是我国第 46 个植树节，截至 2023 年，全国完成新增种植和低产林改造10180000亩，将数据10180000用科学记数法表示为______．

【答案】1.018×10^7

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法的表示，熟练掌握“将一个数表示成$a\times10^n$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数，这种记数方法叫做科学记数法”是解题的关键．

根据科学记数法正确表示即可.

【详解】解：$10180000 = 1.018\times10^{7}$，

故答案为：1.018×10^{7}．

12．若反比例函数 $y=\dfrac{8}{x}$ 的图象经过点 $A(4,m)$ 和点 $B(-4,n)$，则 m ______ n（填“>”“=”或“<”）.

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查了比较反比例函数值的大小，根据反比例函数解析式正确计算出 m 和 n 的值是解题的关键．

【详解】解：∵反比例函数 $y=\dfrac{8}{x}$ 的图象经过点 $A(4,m)$ 和点 $B(-4,n)$，

$\therefore m=\dfrac{8}{4}=2$，$n=\dfrac{8}{-4}=-2$，

$\because 2>-2$，

$\therefore m>n$，

故答案为：>．

13．有四张大小、形状完全相同的卡片，卡片上分别写有 -2，-3，2，3，从这四张卡片随机同时抽取两张，则抽取的两张卡片上的数字之和小于 0 的概率是______．

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】

【分析】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意画树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率＝所求情况数与总情况数之比．

列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可．

【详解】解：列表如下：

	-2	-3	2	3
-2		-5	0	1
-3	-5		-1	0

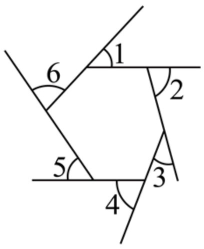
2	0	-1		5
3	1	0	5	

由上可知，共有 12 种等可能的结果，数字之和小于 0 的结果有 4 种，

∴抽取的两张卡片上的数字之和小于 0 的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$．

14．如图，已知$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=280^\circ$，那么$\angle 6=$______$^\circ$．



【答案】80

【解析】

【分析】本题考查了多边形的外角和，熟练掌握基本知识是解决本题的关键．

由多边形的外角和等于360°得$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360^\circ$，代入即可求解$\angle 6$度数．

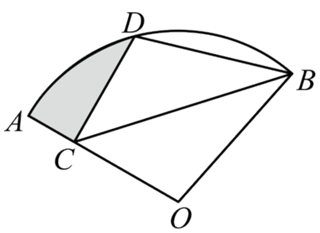
【详解】解：由多边形的外角和等于360°得：$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360^\circ$，

而$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=280^\circ$，

$\therefore \angle 6=360^\circ-280^\circ=80^\circ$，

故答案为：80．

15. 如图，在扇形AOB中，$\angle AOB=105^\circ$，半径$OA=8$，将扇形AOB沿过点B的直线折叠，点O恰好落在$\overset{\frown}{AB}$上的点D处，折痕交OA于点C，则图中阴影部分的面积是______．（结果保留π）



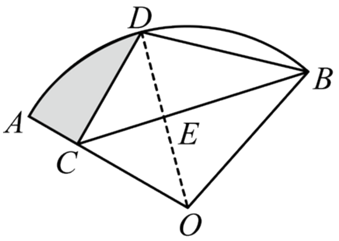
【答案】$8\pi-16$

【解析】

【分析】连接OD，交BC于E，根据对折得出$BC\perp OD$，$DE=OE=4$，$\angle DBE=\angle OBE$，$OB=BD=8$

，易知$\triangle DOB$是等边三角形，根据等边三角形的性质得出$\angle DOB=\angle DBO=60^\circ$，求出$\angle COD=\angle AOB-\angle DOB=45^\circ$，求出$CE=OE=4$，再分别求出扇形$AOD$和$\triangle COD$的面积即可．

【详解】解：连接OD，交BC于E，



$\because$沿BC对折点O和D重合，$OD=8$，

$\therefore BC\perp OD$，$DE=OE=3$，$\angle DBE=\angle OBE$，$OB=BD=8$，

$\therefore \angle BEO=90^\circ$，$\triangle DOB$是等边三角形，

$\therefore \angle DOB=\angle DBO=60^\circ$，

$\because \angle AOB=105^\circ$，

$\therefore \angle COD=\angle AOB-\angle DOB=45^\circ$，

$\because \angle OEC=90^\circ$，

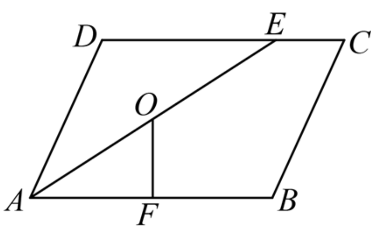
$\therefore CE=OE=4$，

$\therefore$阴影部分的面积$=S_{扇形AOD}-S_{\triangle COD}=\dfrac{45\pi\times 8^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times 8\times 4=8\pi-16$．

故答案为：$8\pi-16$．

【点睛】本题考查了求不规则图形的面积，扇形的面积，等边三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质等知识点，能把求不规则图形的面积转化成求规则图形的面积是解此题的关键．

16. 在$▱ABCD$中，$\angle BAD$的平分线交边CD于点E，与边AB的垂直平分线相交于点O，若点O恰好为线段AE的中点，且$\tan\angle DAE=\dfrac{2}{3}$，$EC=2$，则$BC$的长是______．



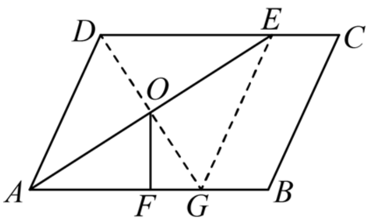
【答案】$\dfrac{36}{5}$

【解析】

【分析】过点E作$EG// CD$，交AD于点G，连接BG，证明四边形$ABEG$为菱形，得出$BG\perp AE$，BG平分AE，$AB=AG=GE$，证明$AO\perp OG$，根据三角函数定义得出$\dfrac{OF}{AF}=\dfrac{OG}{AO}=\dfrac{2}{3}$，

设 $OF=2x$，则 $AF=3x$，求出 $AG=\sqrt{AO^2+OG^2}=\frac{13}{3}x$，根据 $DG=AD-AG=6x-\frac{13}{3}x=2$，求出 $x=\frac{6}{5}$，最后求出结果即可.

【详解】解：过点 E 作 $EG// CD$，交 AD 于点 G，连接 BG，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore BC \parallel AD$， $AB \parallel CD$， $BC=AD$， $AB=CD$，

$\because EG// CD$，

$\therefore AB \parallel EG$，

$\because EG// CD$， $BC \parallel AD$，

$\therefore$ 四边形 $CEGD$ 为平行四边形，

$\therefore GD=CE=2$，

同理可得：四边形 $ABEG$ 为平行四边形，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAE=\angle GAE$，

$\because BC \parallel AD$，

$\therefore \angle BAE=\angle GAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle BEA$，

$\therefore AB=BE$，

$\therefore$ 四边形 $ABEG$ 为菱形，

$\therefore BG\perp AE$， BG 平分 AE， $AB=AG=GE$，

$\because$ 点 O 为 AE 的中点，

$\therefore$ 点 O 在 BG 上，

$\therefore AO\perp OG$，

$\because OF$ 垂直平分 AD，

$\therefore OF\perp AD$， $AF=DF=\frac{1}{2}AD$，

$\because \tan\angle DAE=\frac{2}{3}$，

$\therefore \dfrac{OF}{AF}=\dfrac{OG}{AO}=\dfrac{2}{3}$，

设$OF=2x$，则$AF=3x$，

$\therefore AD=2AF=6x$，

根据勾股定理得：$AO=\sqrt{(2x)^2+(3x)^2}=\sqrt{13}x$，

$\therefore \dfrac{OG}{\sqrt{13}x}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore OG=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}x$，

根据勾股定理得：$AG=\sqrt{AO^2+OG^2}=\dfrac{13}{3}x$，

$\therefore DG=AD-AG=6x-\dfrac{13}{3}x=2$，

解得：$x=\dfrac{6}{5}$，

$\therefore AG=\dfrac{13}{3}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{26}{5}$，

$\therefore BC=AD=AG+GD=\dfrac{26}{5}+2=\dfrac{36}{5}$．

故答案为：$\dfrac{36}{5}$．

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，菱形的判定和性质，平行线的性质，等腰三角形的判定，解直角三角形，勾股定理，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握相关的判定和性质．

17. 若整数a使关于x的一元一次不等式组$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}\le\dfrac{x}{2}\\1-x\ge a\end{cases}$有解，同时使得关于$y$的分式方程$1+\dfrac{a-y}{2-y}=\dfrac{1}{y-2}$的解为非负整数，则满足条件的所有$a$的值之和是______．

【答案】-1

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的解，以及解一元一次不等式组，熟练掌握运算法则是解题关键．

先解不等式组，确定a的取值范围$a\le 3$，再把分式方程去分母转化为整式方程，解得$y=\dfrac{a+3}{2}$，由分式方程有非负数解，确定出a的值，相加即可得到答案．

【详解】解：$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}\le\dfrac{x}{2}①\\1-x\ge a②\end{cases}$，

解不等式①得：$x \geq -2$，

解不等式②得：$x \leq 1-a$，

Q 关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} \frac{x}{2} \geq \frac{x-1}{3} \\ x+a<1 \end{cases}$ 有解，

$\therefore 1-a \geq -2$，

解得：$a \leq 3$，

分式方程 $1+\frac{a-y}{2-y}=\frac{1}{y-2}$ 去分母得：$1+a-y=y-2$，

解得：$y=\frac{a+3}{2}$，

Q y 是非负数，且 $y \neq 2$，

$\therefore a \geq -3$ 且 $a \neq 1$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $-3 \leq a \leq 3$，且 $a \neq 1$，

$\therefore$ 满足条件的整数 a 的和为 $-3-2-1+0+2+3=-1$，

故答案为：-1.

18. 若一个四位正整数 $\overline{abcd}$ 的各个数位上的数字不同，且各个数位上的数字之和为完全平方数，则称这个四位数为“和平数”，那么最大的“和平数”为______；将一个“和平数”M 的前两位数字组成的两位数 $\overline{ab}$ 记为 s，后两位数字组成的两位数 $\overline{cd}$ 记为 t，规定 $F(M)=\frac{s+t}{9}$，$G(M)=\frac{s-t}{3}$，若 $F(M)$、$G(M)$ 都是整数，则满足条件的 M 的最大值和最小值的差为______.

【答案】 ①. 9871 ②. 4815

【解析】

【分析】本题考查了代数式，整式的加减，整除的意义，理解新定义和掌握知识点是解决本题的关键.

①由 a、b、c、d 的取值范围，确定出最大的完全平方数为 25，即可求解；

②确定 $a+b, c+d$ 都能被 3 整除，$a+b+c+d$ 能被 3 整除，继而得到 $a+b+c+d=9$，

因此得到 $M_{\max}=6021$，$M_{\min}=1206$，即可求解.

【详解】解：① $\overline{abcd}$ 为最大的“和平数”，而 $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9, 0 \leq d \leq 9$，

但各个数位上的数字不同，而各个数位上的数字之和为完全平方数，

∴最大的完全平方数为 25，

$\therefore$最大的“和平数”$\overline{9bcd}$，当$b=8$，$c=7$时，$d=25-9-8-7=1$，

$\therefore$最大的“和平数”为9871；

②$s=10a+b,t=10c+d$，则$F(M)=\dfrac{s+t}{9}=\dfrac{10(a+c)+b+d}{9}$，$G(M)=\dfrac{s-t}{3}=\dfrac{10(a-c)+b-d}{3}$，

$\because F(M)$、$G(M)$都是整数，

$\therefore$设$\dfrac{10(a+c)+b+d}{9}=k_1$，$\dfrac{10(a-c)+b-d}{3}=k_2$，$k_1,k_2$为正整数，

则$10(a+c)+b+d=9k_1,10(a-c)+b-d=3k_2$，

两式相加得：$20a+2b=18a+2(a+b)=9k_1+3k_2=3(3k_1-k_2)$，

两式相减得：$20c+2d=18c+2(c+d)=9k_1-3k_2=3(3k_1-k_2)$，

$\therefore a+b,c+d$都能被3整除，

$\therefore a+b+c+d$能被3整除，$4<a+b+c+d<36$

$\because 1\le a\le 9,0\le b\le 9,0\le c\le 9,0\le d\le 9$，

$\therefore 4<a+b+c+d<36$，

$\therefore a+b+c+d=9$或16或25，而$a+b+c+d$能被3整除，

$\therefore a+b+c+d=9$

又$\because a+b,c+d$都能被3整除，

$\therefore a+b=6,c+d=3$时，M最大，$a+b=3,c+d=6$时，M最小，

$\therefore M_{\max}=6021$，$M_{\min}=1206$，

$\therefore M_{\max}-M_{\min}=4815$．

三、解答题（本大题共8个小题，第19题8分，其余每题各10分，共78分）解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤，画出必要的图形（包括辅助线），请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上．

19. 计算：

（1）$4x(x-y)-(2x+y)^2$；

（2）$\left(\dfrac{2a}{a-2}-1\right)\div\dfrac{a^2+4a+4}{a^2+2a}$．

【答案】（1）$-8xy-y^2$

（2）$\dfrac{a}{a-2}$

【解析】

【分析】本题考查的是分式的混合运算，整式的混合运算，熟知运算法则是解题的关键．

（1）先根据单项式乘多项式的法则、完全平方公式分别计算出各式，再合并同类项即可；

（2）先算括号里面的，再算除法即可．

【小问 1 详解】

解：原式$=4x^2-4xy-\left(4x^2+4xy+y^2\right)$

$=4x^2-4xy-4x^2-4xy-y^2$

$=-8xy-y^2$ ；

【小问 2 详解】

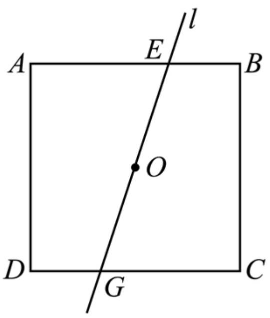
解：原式$=\left(\dfrac{2a-a+2}{a-2}\right)\cdot\dfrac{a\left(a+2\right)}{\left(a+2\right)^2}$

$=\dfrac{a+2}{a-2}\cdot\dfrac{a\left(a+2\right)}{\left(a+2\right)^2}$

$=\dfrac{a}{a-2}$．

20. 学习了正方形的对称性后，同学们发现过正方形对称中心 O 的直线 l 将正方形分成面积相等的两部分．某小组就“能否在此基础上再作一条直线将正方形的面积四等分”进行了探究，小明的想法是: 过点 O 作直线 l 的垂线，他的证明思路是：连接 OB、OC，通过证明三角形全等将四边形的面积转化成三角形的面积从而使问题得到解决，请根据他的思路完成以下作图与填空：

用直尺和圆规，过点 O 作直线 l 的垂线交 AD 于点 H，交 BC 于点 F，连接 OB、OC．（只保留作图痕迹）



已知：如图，过正方形 $ABCD$ 对称中心 O 作两条互相垂直的直线分别交 AB、BC、CD、DA 于点 E、F、G、H．

求证：$S_{\text{四边形}OEAH}=S_{\text{四边形}OFBE}=S_{\text{四边形}OGCF}=S_{\text{四边形}OHDG}$．

证明：$\because O$为正方形的对称中心，

$\therefore O$为正方形对角线AC、BD的交点，

$\therefore OB=OC$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle EBO=\angle FCO=45^\circ$．

$\because HF\perp EG$于点O，

$\therefore$ __①__ $=90^\circ$．

$\therefore \angle EOF-\angle BOF=\angle BOC-\angle BOF$，

$\therefore$ __②__．

$\therefore$在$\triangle EOB$和$\triangle FOC$中，

$$\begin{cases}\angle EBO=\angle FCO, \\ OB=OC, \\ \angle EOB=\angle FOC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle EOB\cong\triangle FOC(\text{ASA})$，

$\therefore$ __③__，

$\therefore S_{四边形OFBE}=S_{\triangle OEB}+S_{\triangle OFB}=S_{\triangle OFC}+S_{\triangle OFB}=S_{\triangle OBC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，

$\therefore$同理可得$S_{四边形OEAH}=S_{四边形OGCF}=S_{四边形OHDG}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，

$\therefore S_{四边形OEAH}=S_{四边形OFBE}=S_{四边形OGCF}=S_{四边形OHDG}$．

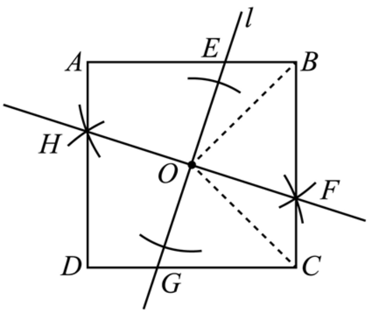
根据题意完成以下命题：过正方形对称中心的两条互相垂直的直线__④__．

【答案】画图见解析，①$\angle EOF$；②$\angle EOB=\angle FOC$；③$S_{\triangle OEB}=S_{\triangle OFC}$；④将正方形的面积四等分

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，垂线的尺规作图，先根据垂线的尺规作图方法作图，再根据正方形的性质以及全等三角形的性质与判定条件结合已给推理过程进行求解即可．

【详解】证明：$\because O$为正方形的对称中心，



$\therefore O$为正方形对角线AC、BD的交点，