

初等数论试卷(B)

一，选择题(满分15分，每题3分)

1, 下列不正确的是()

A 设 $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $b \equiv a \pmod{m}$ 。

B 设 $m \in \mathbb{N}_+, a, b, c \in \mathbb{Z}$, 若 $a + b \equiv c \pmod{m}$, 则 $a \equiv c - b \pmod{m}$ 。

C 设 $m \in \mathbb{N}_+, a_1, b, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$, 若 $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, 则

$a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$ 。

D 设 $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, 若 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, 则 $a \equiv b \pmod{m}$ 。

2, 下列哪一个为模12互质的剩余类()

A [2], B [5], C [6], D [3]。

3, 下列哪一个有理数不可以化为有限小数()

A $\frac{3}{20}$, B $\frac{7}{100}$, C $\frac{1}{5}$, D $\frac{19}{100}$

4, 同余方程 $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ 的解为()

A $x \equiv 0 \pmod{5}$, B $x \equiv 17 \pmod{25}$, C $x \equiv 4 \pmod{5}$, D $x \equiv 2 \pmod{5}$ 此方程无解。

5, 下列哪一方程组无解

A

C

二，填空题(满分10分，每题2分)

1, 当 $m =$ _____ 时, $32 \equiv 11 \pmod{m}$ 和 $17 \equiv 11 \pmod{m}$ 同时成立。

2, 设 $m \in \mathbb{N}$, 则_____ 为模 m 的非负最小完全剩余系。

3, $\phi(16) =$ _____。

4, 写出模8的一个简化剩余系: _____

5, 余式 $x \equiv a \pmod{5}$ 等价于等式: _____

三, 判断题(满分10分, 每题2分)

1, $\phi(m)$ 为欧拉函数, 则 $1 \leq \phi(m) \leq m-1$. ()

2, 设 $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1$, 若整数集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(m)}\}$ 为模 m 的一个简化

剩余系, 则 $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(m)}\}$ 也为模 m 的一个简化剩余系。 ()

3, 模 m 的完全剩余系只有有限个。 ()

4, 循环小数 0.3014545 的循环节长度为 4。 ()

5, 两整数相等, 则必同余。 ()

四, 求解题 (满分 30 分)

1, 用“弃九法”验算下面式子是否正确:

$$28947 \times 34578 = 1001865676. (7')$$

2, 求 $\frac{7}{11}$ 所化成的循环小数的循环节的长度。 (7)

3, 求同余方程 $9x \equiv 6 \pmod{15}$ 的所有解。 (8)

4, 求同余方程组 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$ 的解。 (8)

五, 证明题 (满分 25 分)

1, 证明: 对一切正整数 x 都有 $15x^5 + 24x^4 + 32x^3 - 16x^2 + 3x - 13 \equiv 7x^5 + 3x + 3 \pmod{8}$ 。 (7')

2, 设 p, q 是两个大于 3 的质数, 证明: $p^2 \equiv q^2 \pmod{24}$ 。 (8)

3, 求证: 当 n 为奇数时, $(a+b)(a^n+b^n)$ 。 (10)

初等数论考试试卷 1

一、单项选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1、如果 $a \mid b$, 则 ()。

A $a=b$ B $a=-b$ C $a \leq b$ D $a=\pm b$

2、如果 $a \mid 5$, 则 $15 \mid ()n$ 。

A 整除 B 不整除 C 等于 D 不一定

3、在整数中正素数的个数 ()。

A 有 1 个 B 有限多 C 无限多 D 不一定

4、如果 $a \equiv b \pmod{m}$, c 是任意整数, 则

A $ac=bc(modm)$ B $a=b$ C $acTbe(modm)$ D $a\neq b$

5、如果(),则不定方程 $ax+by=c$ 有解.

A $(a,b)\}c$ B $c(a,b)$ C ac D $(a,b)\}a$

6、 整数5874192能被() 整除 .

A 3 B 3 与 9 C 9 D 3 或 9

二、 填空题(每题3分, 共18分)

1、素数写成两个平方数和的方法是().

2、同余式 $ax+b=0(modm)$ 有解的充分必要条件是().

3、如果a, b是两个正整数, 则不大于a而为b的倍数的正整数的个数为().

4、如果P 是素数, a 是任意一个整数, 则a 被 P 整除或者().

5、a, b 的公倍数是它们最小公倍数的().

6、如果a, b是两个正整数, 则存在()整数q, r, 使 $a=bq+r, 0\leq r<b$.

三、 计算题(每题8分, 共32分)

1、求 $[136, 221, 391]=?$

2、求解不定方程 $9x+21y=144$

3、解同余式 $12x+15=0(mod45)$

4、;求 $\left(\frac{429}{563}\right)$, 其中563是素数. (8分)

四、证明题(第1小题10分, 第2小题11分, 第3小题11分, 共32分)

1、证明对于任意整数n, 数 $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ 是整数

2、证明相邻两个整数的立方之差不能被5整除.

3、证明形如 $4n-1$ 的整数不能写成两个平方数的和.

一、单项选择题(每题3分，共18分)

1、D. 2、A 3、C 4、A 5、A 6、B

二、填空题(每题3分，共18分)

- 1、素数写成两个平方数和的方法是(唯一的).
- 2、同余式 $ax+b\equiv 0 \pmod{m}$ 有解的充分必要条件是 $\gcd(a, m) \mid b$.
- 3、如果 a, b 是两个正整数, 则不大于 a 而为 b 的倍数的正整数的个数为 $\left[\frac{a}{b}\right]$.
- 4、如果 p 是素数, a 是任意一个整数, 则 a 被 p 整除或者(与 p 互素).
- 5、 a, b 的公倍数是它们最小公倍数的(倍数).
- 6、如果 a, b 是两个正整数, 则存在(唯一)整数 q, r , 使 $a=bq+r, 0 \leq r < b$.

三、计算题(每题8分, 共32分)

- 1、求 $[136, 221, 391]=?$ (8分)

$$\text{解 } [136, 221, 391] = [[136, 221], 391] = \left[\frac{136 \times 221}{17}, 391 \right] = [1768, 391]$$

$$= \frac{1768 \times 391}{17} = 104 \times 391 = 40664.$$

- 2、求解不定方程 $9x+21y=144$. (8分)

解: 因为 $\gcd(9, 21)=3 \mid 144$, 所以有解; 化简得 $3x+7y=48$; 考虑 $3x+7y=1$, 有

$$x=-2, y=1,$$

所以原方程的特解为 $x=-96, y=48$, 因此, 所求的解是 $X=-96+71t, y=48-3t, t \in \mathbb{Z}$.

- 3、解同余式 $12x+15 \equiv 0 \pmod{45}$. (8分)

解因为 $\gcd(12, 45)=3 \mid 15$, 所以同余式有解, 而且解的个数为3. 又同余式等价于

$$4x+5 \equiv 0 \pmod{15}, \text{ 即 } 4x+5=15y. \quad x \equiv 10 + 2 \times \frac{45}{3} \pmod{45} \equiv 40 \pmod{45}$$

我们利用解不定方程的方法得到它的一个解是 $(10, 3)$,

即定理4.1中的 $x=10$

因此同余式的3个解为

$$x \equiv 10 \pmod{45}$$

$$x \equiv 10 + \frac{45}{3} (\text{mod } 45) \equiv 25 (\text{mod } 45)$$

4、求 $\left(\frac{429}{563}\right)$, 其中563是素数. (8分)

看成 Jacobi 符号, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{429}{563}\right) &= (-1)^{\frac{429-1}{2} \cdot \frac{563-1}{2}} \left(\frac{563}{429}\right) \\ &= \left(\frac{563}{429}\right) = \left(\frac{134}{429}\right) = \left(\frac{2}{429}\right) \left(\frac{67}{429}\right) = (-1)^{\frac{429^2-1}{8}} \left(\frac{67}{429}\right)\end{aligned}$$

(3 分)

$$\begin{aligned}&= -\left(\frac{67}{429}\right) = -(-1)^{\frac{67-1}{2} \cdot \frac{429-1}{2}} \left(\frac{429}{67}\right) = -\left(\frac{429}{67}\right) \\ &= -\left(\frac{27}{67}\right) = -(-1)^{\frac{27-1}{2} \cdot \frac{67-1}{2}} \left(\frac{67}{27}\right) = \left(\frac{67}{27}\right)\end{aligned}$$

(2 分)

$$= \left(\frac{13}{27}\right) = (-1)^{\frac{27-1}{2} \cdot \frac{13-1}{2}} \left(\frac{27}{13}\right) = \left(\frac{1}{13}\right) = 1$$

即429是563的平方剩余.

----- (1分)

四、证明题(第1小题10分, 第2小题11分, 第3小题11分, 共32分)

1、证明对于任意整数n, 数 $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ 是整数. (10分)

$$\text{证明因为 } \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{n}{6} (2 + 3n + n^2) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \quad \text{----- (3分)}$$

而且两个连续整数的乘积是2的倍数, 3个连续整数的乘积是3的倍数, ----- (2分)

并且 $(2, 3)=1$, ----- (1分)

所以从 $2|n(n+1)(n+2)$ 和 $3|n(n+1)(n+2)$ 有 $6|n(n+1)(n+2)$, ----- (3分)

即 $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ 是整数. ----- (1分)

2、证明相邻两个整数的立方之差不能被5整除. (11分)

证明因为 $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ _____ (3分)

所以只需证明 $3n^2+3n+1 \pmod{5}$

而我们知道模5的完全剩余系由-2, -1, 0, 1, 2构成,

所以这只需将 $n=0, \pm 1, \pm 2$ 代入 $3n^2+3n+1$ 分别得值1, 7, 1, 19, 7.

对于模5, $3n^2+3n+1$ 的值1, 7, 1, 19, 7只与1, 2, 4等同余,

所以 $3n^2+3n+1 \equiv r \pmod{5}$ ----- (7分)

所以相邻两个整数的立方之差不能被5整除。 ----- (1分)

3、证明形如 $4n-1$ 的整数不能写成两个平方数的和. (11分)

证明设 n 是正数, 并且 $n \equiv -1 \pmod{4}$ ----- (3分)

如果

$n = x^2 + y^2$ ----- (1分)

则因为对于模4, x, y 只与0, 1, 2, -1 等同余,

所以 x^2, y^2 只能与0, 1 同余,

所以

$x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$ ----- (4分)

而这与 $n \equiv -1 \pmod{4}$ 的假设不符, ----- (2分)

即定理的结论成立. ----- (1分)

一、单项选择题

1、 $(0, b) = (C)$. A b B $-b$ C $|b|$ D 0

2、如果 ba, ab , 则(D). A $a=b$ B $a=-b$ C $a \leq b$ D $a=\pm b$

3、如果 $(a, b)=1$, 则 $(ab, a+b)=(C)$. A a B b C 1 D $a+b$

4、小于30的素数的个数 (A). A 10 B 9 C 8 D 7

5、大于10且小于30的素数有 (C). A 4个 B 5个 C 6个 D 7个

6、如果 $3|n, 5|n$, 则15 (A) n . A 整除 B 不整除 C 等于 D 不一定

7、在整数中正素数的个数 (C). A 有1个 B 有限多 C 无限多 D 不一定

二、计算题

1、求24871与3468的最大公因数?

解: $24871 = 3468 \times 7 + 595$
 $3468 = 595 \times 5 + 493$
 $595 = 493 \times 1 + 102$
 $493 = 102 \times 4 + 85$
 $102 = 85 \times 1 + 17$
 $85 = 17 \times 5$, 所以, $(24871, 3468) = 17$.

2、求 $[24871, 3468] = ?$

解: 因为 $(24871, 3468) = 17$ 所以

$[24871, 3468] = \frac{24871 \times 3468}{17} = 5073684$ 所以24871 与3468的最小公倍数

是5073684。

3、求 $[136, 221, 391]=?$

$$\begin{aligned}\text{解: } [136, 221, 391] &= [[136, 221], 391] = \left[\frac{136 \times 221}{17}, 391 \right] = [1768, 391] \\ &= \frac{1768 \times 391}{17} = 104 \times 391 = 40664.\end{aligned}$$

三、证明题

1、如果 a, b 是两个整数, $b > 0$, 则存在唯一的整数对 q, r , 使得 $a = bq + r$, 其中 $0 \leq r < b$.

证明: 首先证明唯一性. 设 q', r' 是满足条件的另外整数对, 即

$$a = bq' + r', 0 \leq r' < b.$$

所以 $bq' + r' = bq + r$, 即 $b(q' - q) = r - r'$, $bq' - ql = |r - r'|$. 又由于 $0 \leq r < b, 0 \leq r' < b$, 所以 $|r - r'| < b$. 如果 $q \neq q'$, 则等式 $bq' - ql = |r - r'|$ 不可能成立. 因此 $q = q', r = r'$.

其次证明存在性. 我们考虑整数的有序列

$$\dots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \dots$$

则整数 a 应介于上面有序列的某两数之间, 即存在一整数 q 使

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

我们设 $r = a - qb$, 则有 $a = bq + r, 0 \leq r < b$.

2、证明对于任意整数 n , 数 $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ 是整数.

$$\text{证明: 因为 } \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{n}{6} (2 + 3n + n^2) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2),$$

而且两个连续整数的乘积是2的倍数, 3个连续整数的乘积是3的倍数,

并且 $(2, 3) = 1$,

所以从 $2n(n+1)(n+2)$ 和 $3n(n+1)(n+2)$ 有 $6n(n+1)(n+2)$,

$$\text{即 } \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} \text{ 是整数.}$$

- 3、 任意一个 n 位数 $a_1a_2\cdots a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 与其按逆字码排列得到的数 $a_1a_2\cdots a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的差必是9 的倍数.

证明： 因为

$$a_1Q - \dots a_2G_1 = a_1 \times 10^{4^1} + a_2 \times 10^{4^2} + \dots + a_2 \times 10 + a_j,$$

$$a_1a_2 \dots a_{-1}a = a_1 \times 10^{n^1} + a_2 \times 10^{4^2} + \dots + a_{-1} \times 10 + a,,$$

所以, $a_1a_2 \dots a_{-1}a_1a_2 \dots a_{-1}a =$

$$a \times (10^{4^1} - 1) + a_2 \times 10(10^{4^3} - 1) + \dots$$

$$+ a_2 \times 10(1 - 10^{-2}) + a_1(1 - 10^{-n}).$$

而上面等式右边的每一项均是9的倍数,

于是所证明的结论成立.

4、 证明相邻两个偶数的乘积是8的倍数.

证明： 设相邻两个偶数分别为 $2n, (2n+2)$

$$\text{所以 } 2n(2n+2) = 4n(n+1)$$

而且两个连续整数的乘积是2的倍数

即 $4n(n+1)$ 是8的倍数 .

一、单项选择题

1、 如果(A), 则不定方程 $ax+by=c$ 有解.

A $(a, b) | c$ B $c | (a, b)$ C $a | c$ D $(a, b) | a$

2、 不定方程 $525x+231y=210$ (A).

A 有解 B 无解 C 有正数解 D 有负数解

二、求解不定方程

1、 $9x+21y=144$.

解： 因为 $(9, 21) = 3, 3 | 144$, 所以有解；

化简得 $3x+7y=48$;

考虑 $3x+7y=1$, 有 $x=-2, y=1$,

所以原方程的特解为 $x=-96, y=48$,

因此, 所求的解是 $x=-96+7t, y=48-3r, \quad t \in \mathbb{Z}$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。
。如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/675122041142011220>