专题3　反比例函数的综合应用

角度1　与一次函数结合

——求两个函数解析式及交点

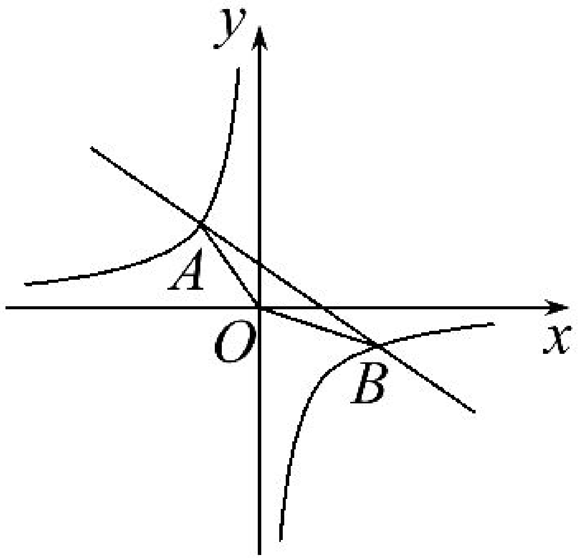
【思维切入】

1.将已知点代入反比例函数解析式,先得反比例函数;再求另一点,将两个点代入一次函数解析式,得一次函数解析式.

2.将反比例函数和一次函数解析式联立得方程组,解得两个交点的坐标,进一步求解.

【针对训练】

1.(2024·广元)如图,已知反比例函数$y_1=\frac{k}{x}$和一次函数$y_2=mx+n$的图象相交于点$A(-3,a)$,$B(a+\frac{3}{2},-2)$两点,O为坐标原点,连接OA,OB.



(1)求$y_1=\frac{k}{x}$与$y_2=mx+n$的解析式;

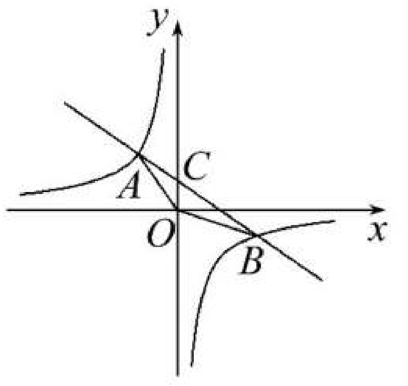
(2)当$y_1>y_2$时,请结合图象直接写出自变量x的取值范围;

(3)求△AOB的面积.

【解析】(1)由题知$-3a=-2(a+\frac{3}{2})$,∴$a=3$,∴$A(-3,3)$,$B(\frac{9}{2},-2)$,∴$y_1=-\frac{9}{x}$.

把$A(-3,3)$,$B(\frac{9}{2},-2)$代入$y_2=mx+n$得$\begin{cases}-3m+n=3\\ \frac{9}{2}m+n=-2\end{cases}$,∴$\begin{cases}m=-\frac{2}{3}\\ n=1\end{cases}$,∴$y_2=-\frac{2}{3}x+1$.

(2)由图象可知自变量x的取值范围为$-3<x<0$或$x>\frac{9}{2}$.



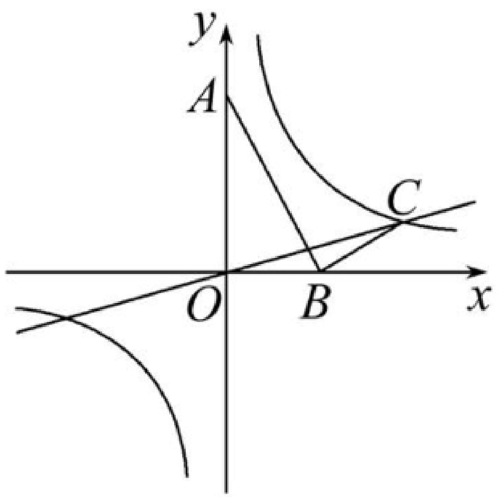
(3)若AB与y轴相交于点C,当$x=0$时,$y_2=-\frac{2}{3}x+1=1$,

∴$C(0,1)$,即$OC=1$,∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OC(x_B-x_A)=\frac{1}{2}\times1\times(\frac{9}{2}+3)=\frac{15}{4}$.

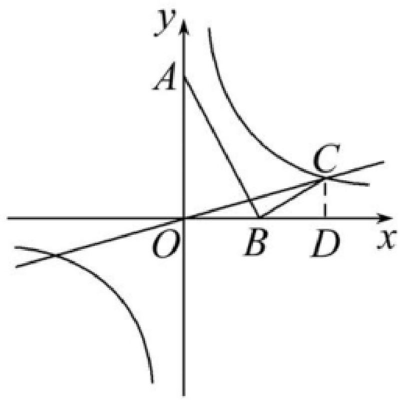
2.(2023·菏泽)如图,已知坐标轴上两点$A(0,4)$,$B(2,0)$,连接AB,过点B作$BC\perp AB$,交反比例函数$y=\frac{k}{x}$在第一象限的图象于点$C(a,1)$.

(1)求反比例函数$y=\frac{k}{x}$和直线OC的解析式;

(2)将直线OC向上平移$\frac{3}{2}$个单位,得到直线l,求直线l与反比例函数图象的交点坐标.



【解析】(1)如图,过点C作$CD\perp x$轴于点D,$\therefore\angle BDC=90°$,



$\because\angle AOB=90°$,$\therefore\angle BDC=\angle AOB$,$\because BC\perp AB$,$\therefore\angle ABC=90°$,

$\therefore\angle ABO+\angle CBD=90°$,$\because\angle AOB=90°$,$\therefore\angle ABO+\angle BAO=90°$,

$\therefore\angle CBD=\angle BAO$,$\therefore\triangle CBD\backsim\triangle BAO$,$\therefore\frac{CD}{BO}=\frac{BD}{AO}$,

$\because A(0,4),B(2,0),C(a,1)$,$\therefore AO=4,BO=2,CD=1,OD=a$,$\therefore\frac{1}{2}=\frac{BD}{4}$,$\therefore BD=2$,

$\therefore OD=BO+BD=4$,$\therefore a=4$,$\therefore$点C的坐标是$(4,1)$,

$\because$反比例函数$y=\frac{k}{x}$过点C,$\therefore k=4\times1=4$,$\therefore$反比例函数的解析式为$y=\frac{4}{x}$;

设直线OC的表达式为$y=mx$,$\because$其图象经过点$C(4,1)$,$\therefore 4m=1$,解得$m=\frac{1}{4}$,

$\therefore$直线OC的解析式为$y=\frac{1}{4}x$;

(2)将直线OC向上平移$\frac{3}{2}$个单位,得到直线l,∴直线l的表达式为$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$,

由题意得,$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$,解得$\begin{cases} x_1=-8 \\ y_1=-\frac{1}{2} \end{cases}$,$\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=2 \end{cases}$,

∴直线l与反比例函数图象的交点坐标为$(-8,-\frac{1}{2})$或$(2,2)$.

角度2　与几何图形结合

类型1　求三角形的面积

【思维切入】

1.补全求差:将三角形补成矩形或梯形或易求的三角形,然后用面积差求解.

2.分割求和:利用坐标轴进行分割求和或利用纵底横高求解.

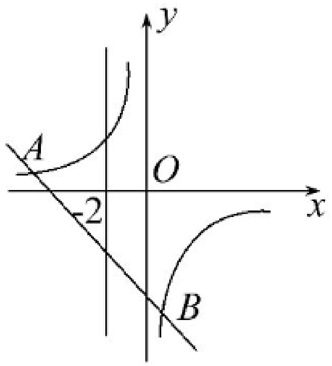
【针对训练】

3.(2024·自贡)如图,在平面直角坐标系中,一次函数$y=kx+b$的图象与反比例函数$y=\frac{m}{x}$的图象交于$A(-6,1)$,$B(1,n)$两点.

(1)求反比例函数和一次函数的解析式;

(2)P是直线$x=-2$上的一个动点,△PAB的面积为21,求点P坐标;

(3)点Q在反比例函数$y=\frac{m}{x}$位于第四象限的图象上,△QAB的面积为21,请直接写出Q点坐标.

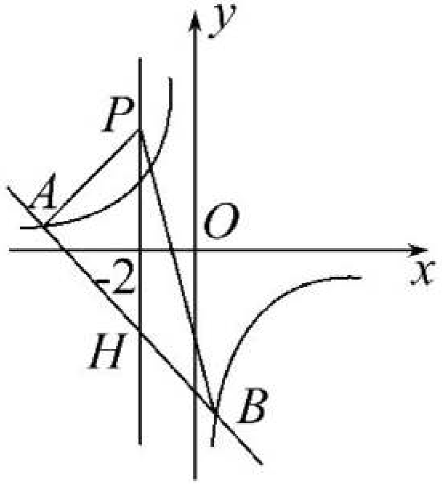


【解析】(1)把$A(-6,1)$代入$y=\frac{m}{x}$得:$1=\frac{m}{-6}$,∴$m=-6$,∴反比例函数的解析式为$y=-\frac{6}{x}$.

把$B(1,n)$代入$y=-\frac{6}{x}$得:$n=-6$,∴$B(1,-6)$,把$A(-6,1)$,$B(1,-6)$代入$y=kx+b$得:

$\begin{cases} -6k+b=1 \\ k+b=-6 \end{cases}$,解得$\begin{cases} k=-1 \\ b=-5 \end{cases}$,∴一次函数的解析式为$y=-x-5$.

(2)设直线$x=-2$交直线AB于H,如图:



在$y=-x-5$中,令$x=-2$得$y=-3$,∴$H(-2,-3)$.

∵△PAB的面积为21,∴$\frac{1}{2}PH\cdot(x_B-x_A)=21$,

即$\frac{1}{2}PH\times(1+6)=21$,∴$PH=6$.∵$-3+6=3$,$-3-6=-9$,∴$P$的坐标为$(-2,3)$或$(-2,-9)$.