

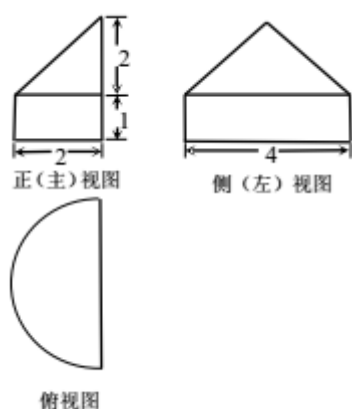
炎德英才大联考 2024 年数学高三上期末考试模拟试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

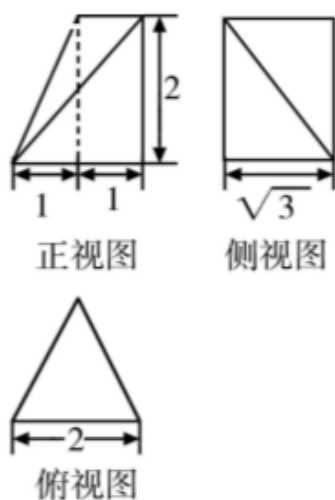
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某几何体的三视图如图所示，其俯视图是由一个半圆与其直径组成的图形，则此几何体的体积是（ ）



- A. $\frac{20}{3}\pi$ B. 6π C. $\frac{10}{3}\pi$ D. $\frac{16}{3}\pi$

2. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱的长为（ ）



- A. $2\sqrt{5}$ B. 4 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

3. 著名的斐波那契数列 $\{a_n\}$ ：1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 若

$$a_k = \sum_{n=1}^{2020} a_{2n-1}, \text{ 则 } k = (\quad)$$

- A. 2020 B. 4038 C. 4039 D. 4040

4. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $\cos 2\theta =$ ()

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为 ()

- A. 5 B. 9 C. 6 D. 12

6. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题, 叫做“物不知数”, 原文如下: 今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二. 问物几何? 现有这样一个相关的问题: 将 1 到 2020 这 2020 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列, 构成一个数列, 则该数列各项之和为 ()

- A. 56383 B. 57171 C. 59189 D. 61242

7. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = |n-c| (n \in \mathbb{N}^*)$. 则“ $c < 2$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的 () 条件.

- A. 必要而不充分 B. 充要 C. 充分而不必要 D. 即不充分也不必要

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = -5$, $a_5 + a_6 + a_7 = 9$, 若 $b_n = \frac{3}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{b_n\}$ 的最大值是 ()

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
C. 1 D. 3

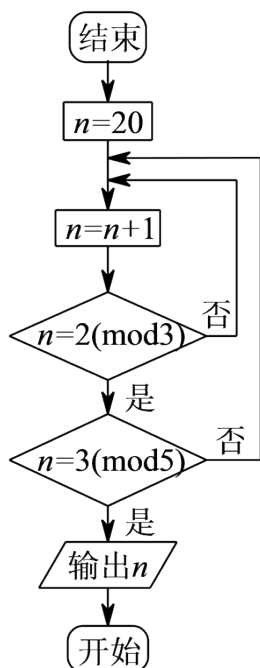
9. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0 \right\}$, 则集合 A 真子集的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 过原点作一条倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 直线分别交双曲线左、右两支 P, Q 两点, 以线段 PQ 为直径的圆过右焦点 F , 则双曲线离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}+1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

11. 中国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道算术题: “今有物不知其数, 三三数之余二, 五五数之余三, 问物几何?” 人们把此类题目称为“中国剩余定理”, 若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n , 则记为 $N = n(\text{mod } m)$, 例如 $11 = 2(\text{mod } 3)$. 现将该问题以程序框图的算法给出, 执行该程序框图, 则输出的 n 等于 ().



- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

12. 在天文学中,天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为

m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1,2$). 已知太阳的星等是-26.7, 天狼星的星等是-1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金; 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金. 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $D(\xi_1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $E(\xi_1) - E(\xi_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知集合 $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ x + y \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$, 若 $z = x + 3y + a$ 的最大值是 10, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

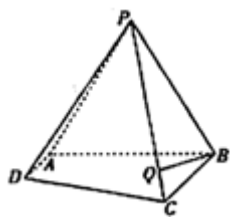
17. (12 分) 已知函数 $f_0(x) = e^{ax} \sin(bx)$, 设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $f_1(x)$, $f_2(x)$;

(2) 猜想 $f_n(x)$ 的表达式, 并证明你的结论.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形且 $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2AD = 2$

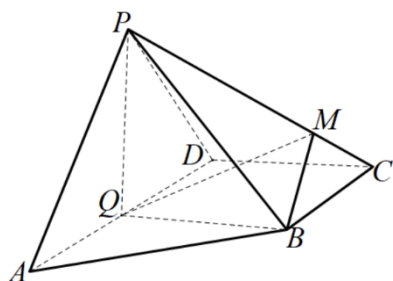
，侧面 PAB 为等边三角形，且平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ 。



(1) 求平面 PAB 与平面 PDC 所成的锐二面角的大小；

(2) 若 $\vec{CQ} = \lambda \vec{CP}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，且直线 BQ 与平面 PDC 所成角为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 λ 的值。

19. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， Q 为 AD 的中点， M 是棱 PC 上的点且 $PM = 3MC$ ， $PA = PD = 2$ ， $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ， $CD = 2$ 。



(1) 求证：平面 $PQB \perp$ 平面 PAD ；

(2) 求二面角 $M-BQ-C$ 的大小。

20. (12 分) 已知 $f(x) = |x+a|$ ($a \in \mathbb{R}$)。

(1) 若 $f(x) \geq |2x-1|$ 的解集为 $[0, 2]$ ，求 a 的值；

(2) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$ ，不等式 $f'(x) = 1 + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，有一个微型智能机器人（大小不计）只能沿着坐标轴的正方向或负方向行进，且每一步只能行进 1 个单位长度，例如：该机器人在点 $(1, 0)$ 处时，下一步可行进到 $(2, 0)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(1, -1)$ 这四个点中的任一位置。记该机器人从坐标原点 O 出发、行进 n 步后落在 y 轴上的不同走法的种数为 $L(n)$ 。

(1) 分别求 $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $L(3)$ 的值；

(2) 求 $L(n)$ 的表达式。

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点 O 为极点， x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + 4 = 0$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若点 P 在曲线 C_1 上，点 Q 在曲线 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时点 P 的坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由三视图可知，该几何体是下部是半径为 2，高为 1 的圆柱的一半，上部为底面半径为 2，高为 2 的圆锥的一半，所以，

半圆柱的体积为 $V_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \pi \times 1 = 2\pi$ ，上半圆锥的体积为 $V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2\pi \times 2^2 = \frac{4\pi}{3}$ ，所以该几何体的体积为

$V = V_1 + V_2 = 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ ，故应选 C .

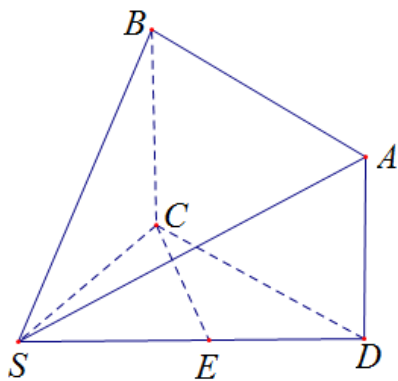
2、D

【解析】

先根据三视图还原几何体是一个四棱锥，根据三视图的数据，计算各棱的长度.

【详解】

根据三视图可知，几何体是一个四棱锥，如图所示：



由三视图知： $|AD| = 2$ ， $|AE| = \sqrt{3}$ ， $|SD| = 2$ ，

所以 $|SC| = |DC| = 2$,

所以 $|SA| = \sqrt{|SD|^2 + |AD|^2} = 2\sqrt{2}$, $|SB| = \sqrt{|SC|^2 + |BC|^2} = 2\sqrt{2}$,

所以该几何体的最长棱的长为 $2\sqrt{2}$

故选: D

【点睛】

本题主要考查三视图的应用, 还考查了空间想象和运算求解的能力, 属于中档题.

3、D

【解析】

计算 $a_1 + a_3 = a_4$, 代入等式, 根据 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 化简得到答案.

【详解】

$a_1 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, 故 $a_1 + a_3 = a_4$,

$$\sum_{n=1}^{2020} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{4039} = a_4 + a_5 + a_7 + \dots + a_{4039} = a_6 + a_7 + \dots + a_{4039} = \dots = a_{4040},$$

故 $k = 4040$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了斐波那契数列, 意在考查学生的计算能力和应用能力.

4、A

【解析】

由已知可得 $\sin \theta$, 根据二倍角公式即可求解.

【详解】

角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合,

终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $|OP| = \sqrt{5}$, $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = -\frac{3}{5}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查三角函数定义、二倍角公式, 考查计算求解能力, 属于基础题.

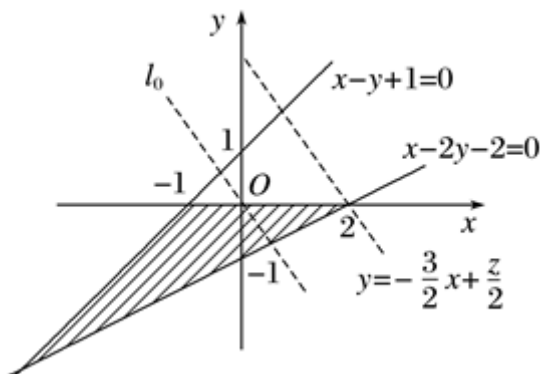
5、C

【解析】

作出 inequality 组所表示的可行域，平移直线 $z = 3x + 2y$ ，找出直线在 y 轴上的截距最大时对应的最优解，代入目标函数计算即可。

【详解】

作出满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ 的可行域如图阴影部分（包括边界）所示。



由 $z = 3x + 2y$ ，得 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ ，平移直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ ，当直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ 经过点 $(2, 0)$ 时，该直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取最大值，

即 $z_{\max} = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查简单的线性规划问题，考查线性目标函数的最值，一般利用平移直线的方法找到最优解，考查数形结合思想的应用，属于基础题。

6、C

【解析】

根据“被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数”，可得这些数构成等差数列，然后根据等差数列的前 n 项和公式，可得结果。

【详解】

被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的正整数构成首项为 23，

公差为 $5 \times 7 = 35$ 的等差数列，记数列 $\{a_n\}$

则 $a_n = 23 + 35(n - 1) = 35n - 12$

令 $a_n = 35n - 12 \leq 2020$ ，解得 $n \leq 58\frac{2}{35}$ 。

故该数列各项之和为 $58 \times 23 + \frac{58 \times 57}{2} \times 35 = 59189$ 。

故选: C.

【点睛】

本题考查等差数列的应用, 属基础题.

7、A

【解析】

根据递增数列的特点可知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 解得 $c < n + \frac{1}{2}$, 由此得到若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $c < \frac{3}{2}$, 根据推出关系可确定结果.

【详解】

若“ $\{a_n\}$ 是递增数列”, 则 $a_{n+1} - a_n = |n+1-c| - |n-c| > 0$,

即 $(n+1-c)^2 > (n-c)^2$, 化简得: $c < n + \frac{1}{2}$,

又 $n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore n + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$, $\therefore c < \frac{3}{2}$,

则 $c < 2$ 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\{a_n\}$ 是递增数列 $\Rightarrow c < 2$,

$\therefore$ “ $c < 2$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的必要不充分条件.

故选: A.

【点睛】

本题考查充分条件与必要条件的判断, 涉及到根据数列的单调性求解参数范围, 属于基础题.

8、D

【解析】

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 利用已知可求得通项公式 $a_n = 2n - 9$, 进而 $b_n = \frac{3}{a_n} = \frac{3}{2n-9}$, 借助 $f(x) = \frac{3}{2x-9}$ 函数的单调性

可知, 当 $n = 5$ 时, b_n 取最大即可求得结果.

【详解】

因为 $a_5 + a_6 + a_7 = 9$, 所以 $3a_6 = 9$, 即 $a_6 = 3$, 又 $a_2 = -5$, 所以公差 $d = 2$, 所以 $a_n = 2n - 9$, 即 $b_n = \frac{3}{2n-9}$, 因

为函数 $f(x) = \frac{3}{2x-9}$, 在 $x < 4.5$ 时, 单调递减, 且 $f(x) < 0$; 在 $x > 4.5$ 时, 单调递减, 且 $f(x) > 0$. 所以数列 $\{b_n\}$

的最大值是 b_5 , 且 $b_5 = \frac{3}{1} = 3$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的最大值是 3.

故选: D.

【点睛】

本题考查等差数列的通项公式, 考查数列与函数的关系, 借助函数单调性研究数列最值问题, 难度较易.

9、C

【解析】

解出集合 A ，再由含有 n 个元素的集合，其真子集的个数为 $2^n - 1$ 个可得答案.

【详解】

解：由 $A = \left\{ x \in Z \mid \frac{x}{x+3} \leq 0 \right\}$ ，得 $A = \{ x \in Z \mid -3 < x \leq 0 \} = \{-2, -1, 0\}$

所以集合 A 的真子集个数为 $2^3 - 1 = 7$ 个.

故选：C

【点睛】

此题考查利用集合子集个数判断集合元素个数的应用，含有 n 个元素的集合，其真子集的个数为 $2^n - 1$ 个，属于基础题.

10、B

【解析】

求得直线 PQ 的方程，联立直线的方程和双曲线的方程，求得 P, Q 两点坐标的关系，根据 $FQ \perp FP$ 列方程，化简后求得离心率.

【详解】

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，依题意直线 PQ 的方程为 $y = \sqrt{3}x$ ，代入双曲线方程并化简得

$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - 3a^2}, y^2 = 3x^2 = \frac{3a^2 b^2}{b^2 - 3a^2}$ ，故 $x_1 + x_2 = 0, x_1 \cdot x_2 = \frac{-a^2 b^2}{b^2 - 3a^2}$ ， $y_1 \cdot y_2 = 3x_1 \cdot x_2 = \frac{-3a^2 b^2}{b^2 - 3a^2}$ ，设焦点坐标为

$F(c, 0)$ ，由于以 PQ 为直径的圆经过点 F ，故 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$ ，即 $(x_1 - c, y_1) \cdot (x_2 - c, y_2) = 0$ ，即 $4x_1 x_2 + c^2 = 0$ ，即

$b^4 - 6a^2 b^2 - 3a^4 = 0$ ，两边除以 a^4 得 $\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 6\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3 = 0$ ，解得 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3}$. 故

$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$ ，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查直线和双曲线的交点，考查圆的直径有关的几何性质，考查运算求解能力，属于中档题.

11、C

【解析】

从 21 开始，输出的数是除以 3 余 2，除以 5 余 3，满足条件的是 23，故选 C.

12、A

【解析】

由题意得到关于 E_1, E_2 的等式，结合对数的运算法则可得亮度的比值.

【详解】

两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 令 $m_2 = -1.45, m_1 = -26.7$,

$$\lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{5} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{2}{5} (-1.45 + 26.7) = 10.1, \frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}.$$

故选 A.

【点睛】

本题以天文学问题为背景,考查考生的数学应用意识、信息处理能力、阅读理解能力以及指数对数运算.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、2 0.2

【解析】

分别求出随机变量 ξ_1 和 ξ_2 的分布列，根据期望和方差公式计算得解.

【详解】

设 $a, b \in \{1, 2, 1, 4, 5\}$ ，则 $P(\xi_1 = a) = \frac{1}{5}$ ，其 ξ_1 分布列为：

ξ_1	1	2	1	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(\xi_1) = \frac{1}{5} \times (1+2+1+4+5) = 1.$$

$$D(\xi_1) = \frac{1}{5} \times [(1-1)^2 + (2-1)^2 + (1-1)^2 + (4-1)^2 + (5-1)^2] = 2.$$

$\xi_2 = 1.4|a - b|$ 的可能取值分别为：1.4，2.3，4.2，5.6，

$$P(\xi_2 = 1.4) = \frac{4}{\overset{2}{Q}^2} = \frac{2}{5}, P(\xi_2 = 2.3) = \frac{3}{\overset{2}{Q}^2} = \frac{3}{10}, P(\xi_2 = 4.2) = \frac{2}{\overset{2}{Q}^2} = \frac{2}{10}, P(\xi_2 = 5.6) = \frac{1}{\overset{2}{Q}^2} = \frac{1}{10},$$

可得分布

ξ_2	1.4	2.3	4.2	5.6
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(\xi_2) = 1.4 \times \frac{2}{5} + 2.3 \times \frac{3}{10} + 4.2 \times \frac{2}{10} + 5.6 \times \frac{1}{10} = 2.3.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/675214334012011131>