

南京师大附中 2023 届高三年级模拟考试

数学

2023.5

(总分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 6\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5\}$, 则 B 中元素个数为 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】B

【解析】 $\because U = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5\}$, $\therefore \complement_U B = \{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5\} \subseteq A$,
 $\therefore B = \{0, 2, 4, 6\}$, $\therefore B$ 中元素个数为 4 个, 故选: B.

2. 已知复数 $z = 3 + i$, 则 $|z^2 - 3z| =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】因为 $z = 3 + i$, 所以 $z^2 = (3 + i)^2 = 9 + i^2 + 6i = 8 + 6i$, $z^2 - 3z = 8 + 6i - 3(3 + i) = -1 + 3i$,
故 $|z^2 - 3z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, 故选: C.

3. 将一枚质地均匀的骰子投掷两次, 则第一次掷得的点数能被第二次掷得的点数整除的概率为 ()

- A. $\frac{7}{18}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】将一枚质地均匀的骰子投掷两次, 该试验的样本空间

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$

$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ ，共 36 种；

设事件 $A =$ “第一次掷得的点数能被第二次掷得的点数整除”，

则 $A = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$ 共 14 种，

所以 $P(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ ，则第一次掷得的点数能被第二次掷得的点数整除的概率 $\frac{7}{18}$ ，故选：A.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D ，点 E 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，且 $\vec{CD} = 3\vec{CE} - 2\vec{CA}$ ，若

$\vec{AC} = x\vec{AB} + y\vec{BE}$ ，则 $x + y =$ ()

A. 5

B. 7

C. 9

D. 11

【答案】D

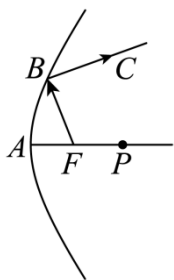
【解析】因为 $\vec{CD} = 3\vec{CE} - 2\vec{CA}$ ，边 BC 的中点为 D ，所以 $\frac{1}{2}\vec{CB} = 3(\vec{BE} - \vec{BC}) + 2\vec{AC}$ ，

因为 $\frac{1}{2}\vec{CB} = 3\vec{BE} - 3\vec{BC} + 2\vec{AC}$ ，所以 $\frac{5}{2}\vec{BC} = 3\vec{BE} + 2\vec{AC}$ ，

所以 $\frac{5}{2}\vec{BC} = \frac{5}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = 3\vec{BE} + 2\vec{AC}$ ，所以 $5\vec{AC} - 5\vec{AB} = 6\vec{BE} + 4\vec{AC}$ ，即 $5\vec{AB} + 6\vec{BE} = \vec{AC}$ ，

因为 $\vec{AC} = x\vec{AB} + y\vec{BE}$ ，所以 $x = 5$ ， $y = 6$ ，故 $x + y = 11$ ，故选：D.

5. 圆锥曲线具有光学性质，如双曲线的光学性质是：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是发散的，其反向延长线会经过双曲线的另一个焦点，如图，一镜面的轴截面图是一条双曲线的部分， AP 是它的一条对称轴， F 是它的一个焦点，一光线从焦点 F 发出，射到镜面上点 B ，反射光线是 BC ，若 $\angle PFB = 120^\circ$ ， $\angle FBC = 90^\circ$ ，则该双曲线的离心率等于 ()



A. $\sqrt{2}$

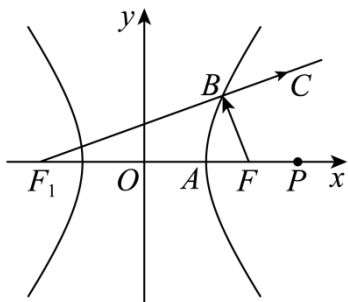
B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3} + 1$

D. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

【答案】C

【解析】在平面直角坐标系中，如图，



反射光线 BC 的反向延长线经过双曲线的另一个焦点 F_1 ,

由 $\angle PFB = 120^\circ$, $\angle FBC = 90^\circ$, 可得 $\angle BFF_1 = 60^\circ$, $\angle FBF_1 = 90^\circ$.

记双曲线的焦距为 $2c$, 长轴长为 $2a$,

在直角三角形 F_1BF 中, $|BF_1| = |F_1F| \sin 60^\circ = \sqrt{3}c$, $|BF| = |FF_1| \cos 60^\circ = c$,

由双曲线的定义, 可得 $|BF_1| - |BF| = 2a$, 所以 $\sqrt{3}c - c = 2a$, 即 $(\sqrt{3} - 1)c = 2a$,

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$, 故选: C

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 则“ $q \neq -1$ ”是“对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, S_n , $S_{2n} - S_n$,

$S_{3n} - S_{2n}$ 构成等比数列的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分条件也不必要条件

【答案】C

【解析】先证明: 若 $q \neq -1$, 则对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 构成等比数列.

若 $q \neq -1$, 则 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

$$S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = a_1 q^n + a_2 q^n + \dots + a_n q^n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) q^n,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots + a_{3n} = a_1 q^{2n} + a_2 q^{2n} + \dots + a_n q^{2n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) q^{2n},$$

可得对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 构成等比数列, 公比为 q^n .

再证明: 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 构成等比数列, 则 $q \neq -1$.

若 $q = -1$, 则 n 为偶数时, $S_n = 0$, 此时 S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 不能构成等比数列, 与已知矛盾, 故

$q \neq -1$ 成立, 故选: C.

7. 已知实数 a, b 满足 $ae^a = e^2$, $\ln \frac{b}{e} = \frac{e^3}{b}$, 其中 e 是自然对数的底数, 则 ab 的值为 ()

- A. e^2 B. e^3 C. $2e^3$ D. e^4

【答案】B

【解析】由 $ae^a = e^2$ 可得, $a = e^{2-a}$, 即 $\ln a = 2 - a$, 也即 $2 - a - \ln a = 0$,

由 $\ln \frac{b}{e} = \frac{e^3}{b}$ 可得 $b(\ln b - 1) = e^3$, 所以 $\ln b + \ln(\ln b - 1) = 3$, 即 $2 - (\ln b - 1) - \ln(\ln b - 1) = 0$,

构造函数 $f(x) = 2 - x - \ln x$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立,

所以函数 $f(x) = 2 - x - \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(a) = f(\ln b - 1) = 0 \Leftrightarrow a = \ln b - 1$, 即 $a + 1 = \ln b$,

又因为 $\ln a = 2 - a$, 所以 $2 - \ln a + 1 = \ln b$, 所以 $\ln ab = 3$, 解得 $ab = e^3$, 故选:B.

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = PC = 1$, $AB = BC = CA = \sqrt{2}$, 圆柱体 OO_1 在三棱锥 $P-ABC$ 内部(包含边界), 且该圆柱体 OO_1 的底面圆 O 在平面 PBC 内, 则当该圆柱体 OO_1 的体积最大时, 圆柱体 OO_1 的高为 ()

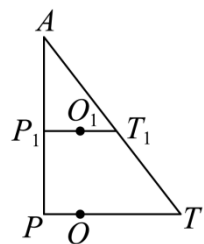
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】设内接圆柱的底面半径为 r , 圆柱体 OO_1 的高为 h .

T_1 是圆柱上底面与三棱锥侧面 ABC 的切点, T 是连接直线 AT_1 与棱锥下底面的交点,

P_1 是圆柱上底面所在平面与 AP_1 的交点, Q $PB = PC = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $\therefore PT = \frac{\sqrt{2}}{2}$,



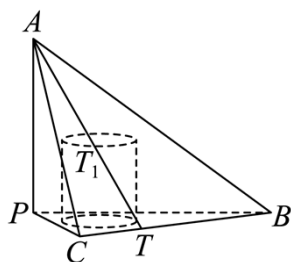
则由 $\triangle AP_1T_1$ 与 $\triangle APT$ 相似, 可得 $\frac{AP_1}{AP} = \frac{PT_1}{PT} = \frac{r + \sqrt{2}r}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 可得, 可得 $h = 1 - (2 + \sqrt{2})r$.

$$\text{内接圆柱体积 } V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left[1 - (2 + \sqrt{2})r \right] = \pi r^2 - (2 + \sqrt{2})\pi r^3.$$

$$\text{因为 } V' = 2\pi r - 3(2 + \sqrt{2})\pi r^2 = 2\pi r \left(1 - \frac{6 + 3\sqrt{2}}{2}r \right),$$

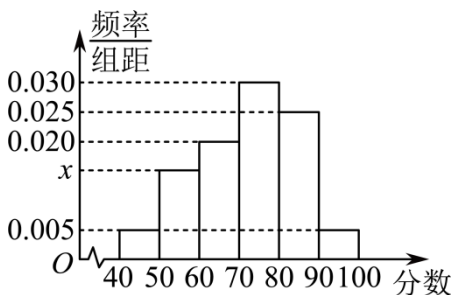
$$r \in \left(0, \frac{2}{6 + 3\sqrt{2}} \right), V' > 0, V \text{ 单调递增}, r \in \left(\frac{2}{6 + 3\sqrt{2}}, 1 \right), V' < 0, V \text{ 单调递减},$$

$$\text{所以 } r = \frac{2}{6 + 3\sqrt{2}}, V \text{ 有最大值, 此时 } h = 1 - (2 + \sqrt{2}) \times \frac{2}{3(2 + \sqrt{2})} = \frac{1}{3}, \text{ 故选:A.}$$



二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 某校对参加高校综合评价测试的学生进行模拟训练，从中抽出 N 名学生，其数学成绩的频率分布直方图如图所示．已知成绩在区间 $[90, 100]$ 内的学生人数为 2 人．则（ ）



- A. x 的值为 0.015， N 的值为 40
- B. 平均分为 72，众数为 75
- C. 中位数为 75
- D. 已知该校共 1000 名学生参加模拟训练，则不低于 90 分的人数一定为 50 人

【答案】AB

【解析】①由图可知， $f_{[40,50)} = 0.05$ ， $f_{[50,60)} = 10x$ ， $f_{[60,70)} = 0.2$ ，

$$f_{[70,80)} = 0.3, f_{[80,90)} = 0.25, f_{[90,100]} = 0.05,$$

由频率之和为 1 可得 $10x = 0.15$ ，故 $x = 0.015$ ；

②因为 $f_{[90,100]} = \frac{2}{N} = 0.05$ ，所以 $N = 40$ ；

③由图可知，众数为 75；

④平均数为 $45 \times 0.05 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.25 + 95 \times 0.05 = 72$ ；

⑤ $f_{[40,50]} + f_{[50,60]} + f_{[60,70]} = 0.4$ ，所以中位数位于区间 $[70, 80)$ ，

设中位数为 a ，则 $(a - 70) \times 0.03 = 0.1$ ，解得 $a = 73.33$ ；

综上所述，AB 正确，而 C 错误；

样本可以估计总体，但是不能通过样本直接确定总体，样本与总体之间总是存在一定的偏差，故选项 D 错误，故选：AB

10. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，且 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称，则

()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 4π

B. $f\left(\frac{2\pi}{9}\right) > f\left(\frac{10\pi}{9}\right)$

C. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位长度后对应的函数为偶函数

D. 函数 $y = 5f(x) + 4$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有一个零点

【答案】ACD

【解析】因为函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}$ ，即 $\frac{\pi}{\omega} \geq \frac{3\pi}{2}$ ，所以 $0 < \omega \leq \frac{2}{3}$ 。

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称，

所以 $-\frac{\pi}{3}\omega + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，得 $\omega = \frac{1}{2} - 3k$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

由 $0 < \omega = \frac{1}{2} - 3k \leq \frac{2}{3}$ ，得 $-\frac{1}{18} \leq k < \frac{1}{6}$ ，因为 $k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $k = 0$ ， $\omega = \frac{1}{2}$ 。

所以 $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 。

对于 A, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 故 A 正确;

对于 B, $f(\frac{2\pi}{9}) = \cos(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{7\pi}{9} = -\cos \frac{2\pi}{9}$,

$f(\frac{10\pi}{9}) = \cos(\frac{1}{2} \times \frac{10\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{11\pi}{9} = -\cos \frac{2\pi}{9}$, 所以 $f(\frac{2\pi}{9}) = f(\frac{10\pi}{9})$, 故 B 不正确;

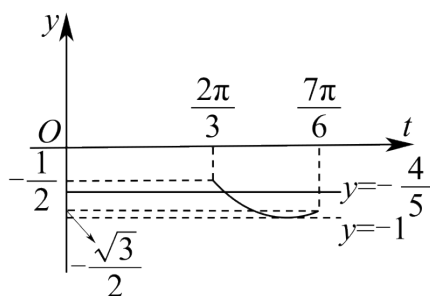
对于 C, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位长度后对应的函数为 $g(x) = \cos[\frac{1}{2}(x - \frac{4\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}] = \cos \frac{1}{2}x$ 为

偶函数, 故 C 正确;

对于 D, $y = 5f(x) + 4 = 5\cos(\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}) + 4$, 令 $y = 0$, 得 $\cos(\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{4}{5}$,

令 $t = \frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}$, 由 $0 \leq x \leq \pi$, 得 $\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{7\pi}{6}$,

作出函数 $y = \cos t \left(\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{7\pi}{6} \right)$ 与直线 $y = -\frac{4}{5}$ 的图象如图:

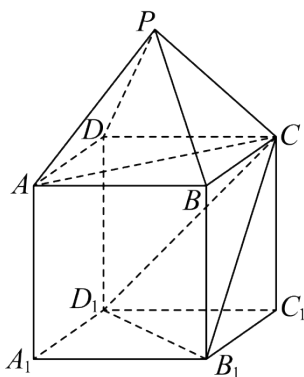


由图可知, 函数 $y = \cos t \left(\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{7\pi}{6} \right)$ 与直线 $y = -\frac{4}{5}$ 的图象有且只有一个交点,

所以函数 $y = 5f(x) + 4$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有一个零点, 故 D 正确.

故选: ACD

11. 如图, 由正四棱锥 $P-ABCD$ 和正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 组成的多面体的所有棱长均为 2. 则 ()



A. $PA \parallel$ 平面 CB_1D_1

B. 平面 $PAC \perp$ 平面 CB_1D_1

C. PB 与平面 CB_1D_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. 点 P 到平面 CB_1D_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

【答案】BD

【解析】以 D_1 为原点，以 D_1A_1, D_1C_1, D_1D 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，连接 BD ，与 AC 交点为 E ，连接 PE ，则 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ ，

因为正四棱锥 $P-ABCD$ 和正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 2，

所以 $BD = AC = 2\sqrt{2}$ ， $AE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ ，点 E 坐标为 $(1, 1, 2)$ ，

所以 $PE = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ ，

对于 A: $\vec{AP} = (-1, 1, \sqrt{2})$ ， $\vec{D_1B_1} = (2, 2, 0)$ ， $\vec{D_1C} = (0, 2, 2)$ ，

设平面 CB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{D_1B_1} \cdot \vec{n_1} = 0 \\ \vec{D_1C} \cdot \vec{n_1} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$ ，取 $x = 1$ 得 $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ ，

因为 $\vec{AP} \cdot \vec{n_1} = -1 - 1 + \sqrt{2} \neq 0$ ，所以 PA 与平面 CB_1D_1 不平行，故 A 错误；

对于 B: 由 A 得平面 CB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ ，

$\vec{AC} = (-2, 2, 0)$ ， $\vec{AP} = (-1, 1, \sqrt{2})$ ，设平面 APC 的一个法向量为 $\vec{n_2} = (a, b, c)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{AC} \cdot \vec{n_2} = 0 \\ \vec{AP} \cdot \vec{n_2} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ -a + b + \sqrt{2}c = 0 \end{cases}$ ，取 $x = 1$ 得 $\vec{n_2} = (1, 1, 0)$ ，

因为 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 - 1 = 0$ ，所以平面 $PAC \perp$ 平面 CB_1D_1 ，故 B 正确；

对于 C: 由 A 得平面 CB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ ，

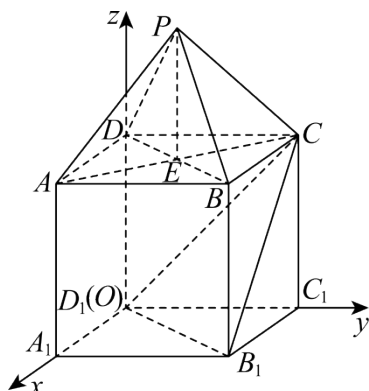
$\vec{BP} = (-1, -1, \sqrt{2})$ ，设 PB 与平面 CB_1D_1 所成角为 θ ，则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{BP}, \vec{n_1} \rangle \right| = \frac{|-1 + 1 + \sqrt{2}|}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

所以 $|\cos \theta| = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ ，故 C 错误；

对于 D: 由 A 得平面 CB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ ，

因为 $\vec{CP} = (1, -1, \sqrt{2})$ ，所以点 P 到平面 CB_1D_1 的距离为 $\frac{|\vec{CP} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \frac{1+1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$ ，故 D 正确；

故选：BD.



12. 点 P 是直线 $y=3$ 上的一个动点， A, B 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的两点. 则 ()

A. 存在 P, A, B ，使得 $\angle APB = 90^\circ$

B. 若 PA, PB 均与圆 O 相切，则弦长 AB 的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

C. 若 PA, PB 均与圆 O 相切，则直线 AB 经过一个定点

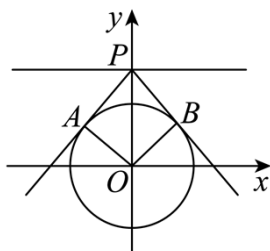
D. 若存在 A, B ，使得 $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$ ，则 P 点的横坐标的取值范围是 $[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

【答案】BCD

【解析】由图可知，当直线 PA, PB 与圆相切且点 P 在 y 轴上时 $\angle APB$ 最大，

此时 $|OP| = 3, |AP| = 2, \sin \angle APO = \frac{2}{3}, \cos \angle APB = 1 - 2\sin^2 \angle APO = \frac{1}{9} > 0$,

所以 $\angle APB$ 最大时是锐角，故 A 错；



$$\frac{1}{2}|AB| \cdot |PO| = |OA| \cdot |PA|, \text{ 所以 } |AB| = \frac{4\sqrt{|PO|^2 - 4}}{|PO|} = 4\sqrt{1 - \frac{4}{|PO|^2}},$$

则当 $|PO|$ 最小时，弦长 AB 最小， $|PO|_{\min} = 3$ ，所以 $|AB|_{\min} = 4\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ ，故 B 正确；

设点 $P(a, 3)$, A, B 是以 PO 为直径的圆上的两点, 圆的方程为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 9}{4}$,

即 $x^2 + y^2 - ax - 3y = 0$ ①, 又 A, B 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ ② 上的两点,

所以直线 AB 的方程为 ②-①: $ax + 3y = 4$, 过定点 $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, 故 C 正确;

若存在 A, B , 使得 $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$, 则 $\cos \angle APB_{\min} \leq \frac{7}{9}$,

当直线 PA, PB 与圆相切时, $\angle APB$ 最大, 对应的余弦值最小,

当直线 PA, PB 与圆相切, 且 $\cos \angle APB = \frac{7}{9}$ 时, $\sin \angle APO = \frac{1}{3}$, $|PO| = 6$,

因为 $|PO| = \sqrt{a^2 + 9}$, 所以 $a = \pm 3\sqrt{3}$, 则 $a \in [-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$, 故 D 正确, 故选: BCD.

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 的最小值为_____.

【答案】4

【解析】易得 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的通项 $T_{r+1} = C_n^r (2x)^{n-r} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r = C_n^r \cdot 2^{n-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{n-\frac{4r}{3}}$ ($0 \leq r \leq n, r \in \mathbf{N}$),

又展开式中存在常数项, 则 $n - \frac{4r}{3} = 0$ 有解, 即 $r = \frac{3n}{4}$,

因为 $r \in \mathbf{N}$, 故 $\frac{3n}{4} \in \mathbf{N}$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$,

故正整数 n 必须是 4 的整数倍, 故 n 的最小值 4.

14. 某班有 45 名同学, 一次考试后的数学成绩服从正态分布 $N(80, 5^2)$, 则理论上在 85 分到 90 分的人数约是_____. (按四舍五入法保留整数)

附: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

【答案】6

【解析】由题意知 $\mu = 80$, $\sigma = 5$,

所以 $P(85 < X \leq 90) = \frac{P(70 \leq X \leq 90) - P(75 \leq X \leq 85)}{2} \approx \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359$,

所以理论上在 85 分到 90 分的人数约是 $45 \times 0.1359 \approx 6$.

15. 已知曲线 $C_1: f(x) = x^2$ 与曲线 $C_2: g(x) = ae^{x+1} (a > 0)$ 有且只有一条公切线, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{e^3}$

【解析】 设曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_1$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 相切于 $x = x_2$ 处,

$f'(x) = 2x$, 故曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_1$ 处的切线方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$, 整理得 $y = 2x_1x - x_1^2$.

$g'(x) = ae^{x+1}$, 故曲线 $y = g(x)$ 在 $x = x_2$ 处的切线方程为 $y - ae^{x_2+1} = ae^{x_2+1}(x - x_2)$,

整理得 $y = ae^{x_2+1}x - ae^{x_2+1}(x_2 - 1)$.

$$\text{故} \begin{cases} 2x_1 = ae^{x_2+1} & (1) \\ -x_1^2 = -ae^{x_2+1}(x_2 - 1) & (2) \end{cases}$$

由(1)再结合 $a > 0$ 知 $x_1 > 0$, 将(1)代入(2), 得 $-x_1^2 = -2x_1(x_2 - 1)$, 解得 $x_1 = 2(x_2 - 1)$ 且 $x_2 > 1$,

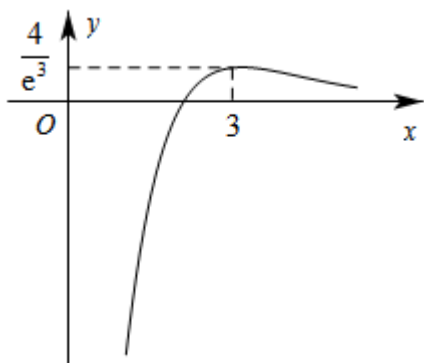
将 $x_1 = 2(x_2 - 1)$ 代入(1), 解得 $4(x_2 - 1) = ae^{x_2+1}$ 且 $x_2 > 1$,

即 $a = \frac{4(x_2 - 1)}{e^{x_2+1}}$ 且 $x_2 > 1$, 令 $t = x_2 + 1$, 则 $a = \frac{4(t-2)}{e^t}$, $t > 2$.

$$\text{令 } h(t) = \frac{4(t-2)}{e^t}, \quad h'(t) = \frac{4(3-t)}{e^t},$$

则 $h(t)$ 在区间 $(2, 3)$ 单调递增, 在区间 $(3, +\infty)$ 单调递减, 且 $h(3) = \frac{4}{e^3}$,

又两曲线有且只有一条公切线, 所以 $a = \frac{4(t-2)}{e^t}$ 只有一个根, 由图和 $a > 0$ 知 $a = \frac{4}{e^3}$.



16. 已知 $0 < a < b < 1$, 设 $W(x) = (x-a)^3(x-b)$, $f_k(x) = \frac{W(x) - W(k)}{x-k}$, 其中 k 是整数. 若对一切 $k \in \mathbf{Z}$,

$y = f_k(x)$ 都是区间 $(k, +\infty)$ 上的严格增函数. 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 _____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/675243003113011332>