# §3.2 1- §3.2.4 函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导法则与导数公式

# 一、函数的和、差、积、商的求导法则

❖定理1

如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$在点$x$具有导数, 那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点$x$具有导数, 并且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$ >>>

下页

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

- 求导法则的推广

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w',$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

- 特殊情况

$$(Cu)'=Cu'.$$

例1 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

$$y'=3x^2-4x+\cos x.$$

下页

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

例2 求 $y=x\ln x\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{4}$ 的导数.

解 $y'=(x\ln x\cdot\sin x)'+(\sin\frac{\pi}{4})'$

$=(x)'\ln x\cdot\sin x+x(\ln x)'\sin x+x\ln x(\sin x)'$

$=\ln x\cdot\sin x+\sin x+x\ln x\cos x\quad+\cos\frac{\pi}{4}$

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

**例4** 求 $y=\frac{x-1}{x+1}$的导数.

**解** $$y'=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

**例3.** $y=\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)$, 求 $y'$, $y'\big|_{x=1}$ 及 $(y\big|_{x=1})'$.

**解:** $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}\,(3x^2+4\sin x)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

$$(y\big|_{x=1})'=0$$

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

**例5** $y=\cot x$, 求$y'$.

**解**

$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

**例6** $y=\csc x$, 求$y'$.

**解**

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$$

用类似方法,还可求得:

$(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

# 练习

1. 求 $y=\dfrac{\tan x}{x^3}$ 的导数.

解 $y'=(\dfrac{\tan x}{x^3})'=\dfrac{(\tan x)'x^3-\tan x(x^3)'}{x^6}$

$$=\frac{x^3\sec^2 x-3x^2\tan x}{x^6}=\frac{x\sec^2 x-3\tan x}{x^4}$$

2. 设$y=\cos x-\sin x$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}}$ .

解 $y'=(\cos x-\sin x)'=(\cos x)'-(\sin x)'$

$$=-\sin x-\cos x$$

$$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=[-\sin x-\cos x]_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$$

# 二、反函数的求导法则

❖ 定理2

如果函数$x=f(y)$在某区间$I_y$内单调、可导且$f'(y)\neq 0$, 那么它的反函数$y=f^{-1}(x)$在对应区间$I_x=f(I_y)$内也可导, 并且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

简要证明 由于$x=f(y)$可导(从而连续), 所以$x=f(y)$的反函数$y=f^{-1}(x)$连续. 当$\Delta x\to 0$时, $\Delta y\to 0$, 所以

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}$$

**即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.**

下页

## 反函数的求导法则: $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$.

**例1** 求$(\arcsin x)'$及$(\arccos x)'$.

**解** 因为$y=\arcsin x$是$x=\sin y$的反函数，所以

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地有 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**例2** 求$(\arctan x)'$及$(\operatorname{arccot} x)'$.

**解** 因为$y=\arctan x$是$x=\tan y$的反函数，所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

类似地有 $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.